



Treball de Recerca

L'ORIGAMI: UNA BARREJA DE MATEMÀTIQUES I CREATIVITAT

Denisa Gabriela Toderoiu

Dirigit per Amparo Tudela Galbis
2n de Batxillerat A
INS Ramón Turró i Darder

Malgrat de Mar, 8 de gener de 2020

Agraïments

Realitzar un Treball de Recerca no és fàcil. Cal dedicar-hi moltes hores per tal de recopilar tota la informació necessària, per entendre-la i sobretot per poder transmetre d'una manera clara aquests nous coneixements als lectors. Moltes vegades l'autor es troba en la situació de no saber com seguir, com enfrontar aquesta tasca essencial per acabar amb èxit el segon curs de batxillerat. Per això, durant aquest camí és necessari tenir persones que et facin costat.

En primer lloc vull dedicar aquest treball a la meva tutora Amparo Tudela i així donar-li les gràcies per haver confiat en la meva idea i per haver-me resolt tots els dubtes de caire matemàtic que m'han anat sorgint. Gràcies, de veritat!

En segon lloc, als meus pares els agraeixo el suport constant i els consells que m'han proporcionat especialment a l'hora de construir les figures d'origami. Gràcies per estar sempre amb mi.

Els agraïments també es dirigeixen cap a la Universitat de Girona per posar al meu abast la seva biblioteca i així poder tenir accés a llibres que han enriquit la meva recerca.

Sense tots vosaltres res no hagués estat possible!

Índex de continguts

0	Introducció.....	7
1	Història de l'origami.....	9
1.1	Què és l'origami ?.....	9
1.2	D'on prové aquest art ?.....	9
1.2.1	Aparició del paper i característiques.....	10
1.2.2	La llegenda de Sadako Sasaki.....	11
1.3	L'origami en l'actualitat.....	12
1.4	Artistes i les seves aportacions.....	13
1.4.1	EMOZ.....	17
2	Models i bases.....	18
2.1	Tipus d'origami.....	18
2.1.1	Alternatives al paper.....	19
2.2	Bases i mòduls principals.....	20
3	Relació de l'origami amb les matemàtiques.....	22
3.1	Matemàtiques en origami pla.....	22
3.1.1	Axiomes de Huzita-Hatori.....	22
3.1.2	Equacions de tercer grau.....	33
3.1.3	Els problemes clàssics grecs.....	39
3.1.4	El teorema de Kawasaki.....	44
3.1.5	El teorema de Maekawa.....	46
3.1.6	Teoria dels grafs i la doble coloració.....	47
3.2	Matemàtiques en origami modular.....	51
3.2.1	Característica d'Euler.....	51
3.2.2	Sòlids platònics.....	52
3.2.3	Buckyballs.....	54
3.2.4	Tor.....	60
4	Aplicacions de l'origami en la vida quotidiana.....	63
4.1	Doblec de un mapa (Miura).....	63
4.1.1	El coeficient de Poisson.....	63
5	Conclusions.....	65
6	Fonts consultades.....	66
6.1	Bibliografia.....	66

6.2	Webgrafia.....	66
	Índex de il·lustracions.....	68
	Índex de taules.....	68
	Índex de figures.....	68
■	Annexos.....	71
1	Construccions d'origami.....	72
1.1	Llistat de les figures realitzades.....	72
1.2	Fotografies EMOZ.....	77
2	Matemàtiques.....	80
2.1	La paràbola.....	80
2.2	Construcció geomètrica de l'axioma 7 fent servir regle sense graduar i compàs.....	82
2.3	Demostració geomètrica de la trisecció.....	84
2.4	Conceptes clau de la teoria de grafs.....	86
3	Característiques del Miura-Ori.....	87

Abstract

Aquest treball de recerca ha sorgit a partir de la gran afició de l'autora per l'origami o papiroflèxia i el desig de conèixer en profunditat quines són les bases matemàtiques que determinen la construcció de les figures de paper. Descobrir per què l'origami ha captat l'interès dels grans matemàtics i quines són les característiques que el converteixen en un nou objecte d'estudi per als enginyers, són dues qüestions clau que es tractaran al llarg de les següents pàgines. La metodologia consisteix en recollir la màxima informació rellevant possible i així tenir una base sòlida de coneixements per després començar a construir models d'origami tot assenyalant els conceptes matemàtics que se'n poden trobar. A més, és interessant conèixer els fonaments de l'origami, la seva importància cultural i també els artistes que més destaquen en aquesta àrea. Finalment, s'arriba a la conclusió de que l'origami és una de les eines més peculiars utilitzades en la resolució d'equacions de tercer grau, fet que confirma la seva supremacia per sobre de les construccions amb regle sense graduar i compàs. Cal mencionar la utilització de la teoria de grafs per acolorir una *buckyball* de paper amb tres colors o bé amb dos en el cas de figures planes. D'aquesta manera, amb aquest treball es pretén visibilitzar l'estudi de l'origami com a material científic i alhora entretingut.

Paraules clau: origami, papiroflèxia, matemàtiques, paper, equacions (de tercer grau), regle i compàs, acolorir.

Este trabajo de investigación ha surgido a partir de la gran afición de la autora por el origami o papiroflexia y el deseo de conocer en profundidad cuáles son las bases matemáticas que determinan la construcción de las figuras de papel. Descubrir por qué el origami ha captado el interés de los grandes matemáticos y cuáles son las características que lo convierten en un nuevo objeto de estudio por los ingenieros, son dos cuestiones clave que se tratarán a lo largo de las siguientes páginas. La metodología consiste en recoger la máxima información relevante posible y así tener una base sólida de conocimientos para después empezar a construir modelos de origami señalando los conceptos matemáticos que se pueden encontrar. Además es interesante conocer los fundamentos del origami, su importancia cultural y también los artistas que más destacan en esta área. Finalmente, se llega a la conclusión de que el origami es una de las

herramientas más peculiares utilizadas en la resolución de ecuaciones de tercer grado, hecho que confirma su supremacía por encima de las construcciones con regla sin graduar y compás. Hay que mencionar el uso de la teoría de grafos para colorear una *buckyball* de papel con tres colores o bien con dos en el caso de figuras planas. De esta manera, con este trabajo se pretende visibilizar el estudio del origami como material científico y al mismo tiempo entretenido.

Palabras clave: origami, papiroflexia, matemáticas, papel, ecuaciones (de tercer grado), regla y compás, colorear.

This paper has appeared from the author's passion for origami or paper folding and her wish to deeply get to know which are the mathematical principles that determine paper figures' construction. Discovering why the biggest mathematicians are interested in origami and which are the characteristics that make it a new object for further engineering investigation are two of the main subjects that will appear in the next pages. The methodology consists in getting the most relevant pieces of information and therefore make a solid knowledge base needed in order to start constructing origami models and show the mathematical concepts that appear. Furthermore, it is interesting to know the fundamentals of origami, its cultural importance and also who are the most popular origami artists. Finally, it reaches the conclusion that origami is one of the most peculiar tools used to solve third degree equations and this confirms its supremacy over straightedge and compass constructions. It is important to mention the use of graph theory in colouring of a buckyball using three colours or just two colours in the case of flat origami figures. In this way, this paper aims to discuss the importance of studying origami as both scientific and entertaining material.

Key words: origami, paper folding, mathematics, paper, equations (third degree), straightedge and compass, colouring.

0 Introducció

Al llarg de la història de la humanitat, les matemàtiques han constituït una eina fonamental per al desenvolupament de la societat. Degut al caràcter abstracte d'aquesta ciència, cada vegada sorgien més preguntes i dubtes que posteriorment s'intentaven resoldre amb més o menys èxit. Així, els coneixements matemàtics s'han anat ampliant i concretant fins a arribar en l'estat actual, que no és, però, el final. La matemàtica ens segueix plantejant nous reptes, la solució dels quals a vegades és difícil de trobar. Gaudim de material tecnològic avançat, que tot i ser extremadament útil no té la creativitat de la ment humana. Per això, la creativitat té un paper important en l'estudi de les matemàtiques, ja que ens permet veure respostes amagades en llocs on ni havíem pensat. Les coses són, molts cops, aparentment senzilles però si ens aturem a estudiar-les minuciosament descobrirem un nou món, complex i fascinant, preparat per mostrar-nos els seus secrets.

La gran majoria de nosaltres considera l'origami com a un passatemps o un joc infantil que no té cap relació directa amb les ciències, concretament amb les matemàtiques. Sembla que hi ha una tendència a categoritzar la papiroflèxia en un àmbit més aviat lúdic que no pas educatiu, pensant que un senzill joc no pot aportar res més que diversió. Tanmateix, el simple tros de paper que dobleguem seguint les normes de l'origami, amaga una immensa quantitat de fórmules i teoremes matemàtics, alguns dels quals són massa complicats per ser estudiats en un institut. Tots i cadascun dels passos seguits es podrien traduir amb llenguatge científic i cap és a l'atzar, ja que en cometre un error mínim, l'estructura final canvia significativament.

He decidit realitzar aquest treball per intentar explicar detalladament la matemàtica de la papiroflèxia i al mateix temps esbrinar quins avantatges obtenim si apliquem aquesta tècnica en diferents àmbits científics d'avui en dia. Des de sempre m'ha fascinat el món de les manualitats i amb el pas dels anys, a la vegada que he anat assolint nous coneixements, m'ha sorgit encara més curiositat per entendre el perquè de cada pas. Ara, tinc l'oportunitat de treballar barrejant dos dels àmbits més interessants per a mi i descobrir les relacions que s'estableixen entre ambdós.

Objectius

Els objectius generals, que de fet m'han determinat a començar aquest treball, esmentats en l'apartat anterior es poden dividir en petits reptes que espero superar en acabar la investigació:

1. Fer un recorregut històric des dels principis de la papiroflèxia fins l'actualitat, tot assenyalant els artistes més destacats, per així construir una base que ajudarà més endavant a entendre els conceptes explicats.
2. Explicar i construir diversos models de papiroflèxia que hi ha i la relació que es pot trobar amb les matemàtiques.
3. Descobrir com al llarg del temps aquesta tècnica s'ha utilitzat per millorar la nostra vida i facilitar les tasques dels científics o enginyers que intentaven resoldre problemes tant teòrics com pràctics.

1 Història de l'origami

Abans d'endinsar-nos en el tema més científic de l'origami, hem de conèixer els seus orígens, la seva evolució al llarg dels anys i el com s'ha convertit en una de les eines matemàtiques més interessants.

1.1 Què és l'origami ?

L'origami és un art que consisteix en el doblegament del paper per tal d'obtenir diverses figures, més o menys complexes. Existeixen unes sèries de passos que cal seguir minuciosament depenent del tipus d'estructura que es vol crear. Aquesta tècnica requereix molta atenció i precisió en cada moment perquè en resulti una estructura final brillant. Una peculiaritat d'aquesta disciplina representa no utilitzar tisores, grapes, cola o qualsevol altre material per mantenir unida la figura final. Tot i així, moltes vegades es fan servir per donar més estabilitat i resistència, especialment si s'utilitza paper d'un gruix molt petit o en algunes variants d'origami modular.

Normalment, es comença amb models més fàcils amb l'objectiu d'anar-se acostumant a la tècnica i guanyar precisió. Més endavant, un cop ja es dominen els conceptes bàsics, es poden crear estructures més difícils. Les figures en tres dimensions solen ser les més populars però a la vegada són les que creen més dificultat a l'hora de construir-les.

El nom *origami* prové d'ajuntar dues paraules nipones : ori (*doblegar*) + kami (*paper*). Tanmateix, sovint els hispanoparlants empen el terme *papiroflèxia* per referir-se a l'origami. A més a més, l'escriptor espanyol Miguel de Unamuno¹ ha donat un nom inèdit a aquest art, dient-li *cocotologia*.

1.2 D'on prové aquest art ?

Avui en dia l'origami es relaciona amb el Japó però cal saber que els seus orígens no provenen d'allà precisament. Degut a la seva antiguitat no es sap amb certesa quin ha sigut el moment exacte en què ha aparegut la tècnica de papiroflèxia però segurament ha

1 Veure apartat 1.4

tingut lloc durant els segles I i II a Xina. Cinc segles més tard, amb la millora de la producció del paper i gràcies al comerç, l'origami ha aconseguit arribar al Japó.

Les figures de paper s'han fet populars al Japó però només entre les classes socials altes, que eren les que disposaven dels recursos suficients per obtenir el paper necessari. Més tard, la resta de la població va poder gaudir d'aquest art gràcies a la reducció del preu del paper. En aquells temps la papiroflèxia representava molt més que una senzilla activitat recreativa, ja que tenia importància religiosa, perquè les figures eren animals o objectes que els ciutadans veneraven o admiraven. Els primers models que es coneixen són la tradicional grua i els *noshi* (il·lustració 1), que eren petits papers amb doblecs especials que els samurais utilitzaven per decorar els regals que es feien mútuament. També, es sap que els japonesos confeccionaven per als casaments xintoistes² dos tipus de papallones de paper, una femella i un mascle respectivament. Aquestes adornaven els vasos de *sake*³ pertanyents als nuvis.

1.2.1 Aparició del paper i característiques

Els primers models d'origami es feien de paper que, de fet, continua sent el material més utilitzat en la construcció d'objectes amb aquesta tècnica. Per tant, és imprescindible esbrinar quins són els principis del paper i per què és idoni per fer origami.

Després de la invenció dels dibuixos i més tard l'aparició de l'escriptura, els humans estaven sempre en busca d'un millor material on plasmar els seus pensaments en forma d'imatges o paraules. Així, els nostres avantpassats feien servir pedra, fulles o escorça d'arbres, petxines o seda. Més endavant, van aparèixer el pergamí i el paper (egipcis, any 3500 a.C) els quals es fabricaven amb fulles o pells d'animals i constituïen una millor base per escriure.



Il·lustració 1: Noshi tradicional japonès

FONT:

<http://nipponario.abranera.com/?p=1042#sthash.M64LES2n.yXK8ZINY.dpbs>

- 2 El xintoisme és una religió basada en venerar els esperits de la naturalesa, com per exemple Amaterasu, la deessa del Sol. Actualment és la segona religió amb més nombres de fidels al Japó.
- 3 El sake és una beguda alcohòlica que s'obté a partir de la fermentació de l'arròs i en els rituals de casaments els nuvis han de beure 9 copes, ja que aquest nombre és sagrat en la religió xintoista.

Posteriorment, a Xina durant l'any 6 a.C s'ha començat a produir paper blanc de seda, molt similar al paper actual. Uns 100 anys més tard, Ts'ai Lun organitzà la producció de paper a partir d'unes barreges majoritàriament fetes de fibres, restes de roba i trossos d'escorça d'arbres com la morera.

L'origami tradicionalment es fa a partir de paper especial japonès, anomenat Washi però no sempre és fàcil d'aconseguir. Per això, els *papiroflexistes* fan servir paper habitual d'escriure quan es tracta de fer figures que no requereixen paper més gruixut o més fi. El paper d'impressora posseeix les característiques següents :

- Resiliència : després de deformar el paper, com per exemple passa quan realitzem un model d'origami, aquest té la capacitat de tornar al seu estat original, això sí, romandran marcades les línies formades pels doblecs. Gràcies a aquesta propietat, es pot estudiar el model desdoblant i veure les matemàtiques que té al darrere.
- Durabilitat : el paper manté el seu bon estat durant molt de temps i permet que les estructures d'origami puguin seguir intactes al llarg dels anys.
- Resistència mecànica : els fulls de paper poden suportar una càrrega d'una certa massa i és una propietat que actualment s'estudia molt.

1.2.2 La llegenda de Sadako Sasaki

La cultura Japonesa dona molta importància als animals. Es pensa que aquests atreuen la bona sort i ajuden la gent que més ho necessita. L'animal que més destaca és l'au anomenada grua, la qual posseeix unes característiques especials que la fan molt important pels nipons. La grua és una au amb longevitat, pot viure fins prop dels 40 anys i és molt protectora. La tradició japonesa diu que degut a les seves grans ales la grua porta les ànimes cap al Cel després de la mort. Cada nen del Japó aprèn a doblegar una grua de paper, especialment des de la popularització de la tràgica història de la Sadako Sasaki.

Sadako era una nena japonesa que va viure a Hiroshima i quan només tenia dos anys, el 1945, va haver de marxar del seu poble per causa de les radiacions provinents de la

bomba atòmica⁴. La nena va créixer i, com la majoria dels infants de la seva època, se li va diagnosticar leucèmia o càncer de la sang, a l'edat d'onze anys, com a conseqüència de les radiacions. La seva esperança de vida, de menys d'un any, no va desanimar a Sadako, la qual coneixia l'existència d'un antic mite que la podria salvar.

Aquest mite suposa el compliment de un desig d'aquella persona que aconsegueixi construir 1000 grues de paper. Per a Sadako, el desig era recuperar-se de la malaltia i per tant va començar a fer grues. No va poder però arribar a fer 1000 ja que quan portava 644 aus de paper el càncer la va derrotar.

Com a símbol de reconeixement i admiració per Sadako, al parc de la pau de Hiroshima hi ha una estàtua on cada any els ciutadans porten grues d'origami commemorant així la valenta noia. A Seattle, a Estats Units, hi ha també un monument de Sadako.



*Il·lustració 2:
Monument de
Sadako Sasaki al
Parc de la Pau,
Hiroshima (Japó)*

FONT:
<https://separatefictions.files.wordpress.com/2012/02/dsc09197.jpg>



*Il·lustració 3: Monument de
Sadako Sasaki al Parc de la Pau,
Seattle (Estats Units)*

FONT:
<https://img.haikudeck.com/mi/6debd5310942bf93df97948d6208afb9.jpeg>

1.3 L'origami en l'actualitat

L'origami ha aconseguit travessar el Japó per arribar a l'Occident i és a partir d'aquest moment que se li comencen a atribuir usos completament diferents. Ara, la papiroflèxia ja

⁴ Es fa referència a la bomba atòmica anomenada «Little Boy» llençada pels Estats Units el 6 d'agost 1945, durant la Segona Guerra Mundial. Tres dies després, la ciutat nipona Nagasaki també va ser destrossada per una bomba similar.

no és només una mera tècnica de fer adorns per rituals. A més de ser un art amb el qual obtenim figures decoratives, l'origami ha trobat també el seu lloc en la ciència i cada vegada es descobreixen més aplicacions seves en la vida quotidiana.

Els anys següents a l'aparició de l'origami les instruccions per realitzar els models bàsics es transmetien oralment. A poc a poc, han anat apareixent llibres amb imatges senzilles que explicaven els passos que calia seguir. Així, l'origami ha passat a ser accessible arreu del món i els nens poden gaudir plenament de l'art japonès.

A partir del començament del segle XXI amb la modernització dels sistemes informàtics, l'origami ha anat apareixent al medi virtual. Definitivament, la creació de contingut en forma de vídeos al lloc web YouTube ha propulsat la papiroflèxia cap a un nivell elevat de popularitat. D'aquesta manera els usuaris veuen exactament com es fan els doblecs amb paper i descobreixen models que no havien vist fins llavors.

1.4 Artistes i les seves aportacions

En el món de l'origami hi ha una multitud d'artistes notables que han contribuït d'una manera o una altra a millorar els models i les tècniques de doblegar el paper. A més, n'hi ha d'altres que estudiant models ja existents han desenvolupat tota una teoria científica sobre les matemàtiques de la papiroflèxia. Cal dir que independentment de la naturalesa de les contribucions, els artistes mencionats mereixen el mateix reconeixement i popularitat, ja que totes ajuden a donar visibilitat a la papiroflèxia, de manera que més persones podran gaudir dels avantatges que aquest art proporciona.

En aquest apartat es presentaran els artistes més populars, els quals o bé s'han dedicat a la part teòrica de l'origami o bé a la part pràctica. No obstant, en alguns casos s'han combinat els coneixements d'ambdues àrees per obtenir resultats espectaculars.

Akira Yoshizawa (14 març 1911 – 14 març 2005)

Akira és actualment reconegut com "el gran mestre de l'origami" degut als 50.000 models que va crear al llarg de la seva vida i per la seva dedicació absoluta en aquest camp. Va néixer al Japó i des de petit s'interessava per la papiroflèxia. Ja passada la seva

adolescència s'encarregava d'ensenyar geometria als principiants mitjançant dobles de paper.

Akira Yoshizawa no va tenir una vida gens fàcil ja que va viure en pobresa molts anys. És important saber que durant aquest temps Akira no va renunciar en cap moment a la creació de nous models d'origami. Aquesta admirable perseverança ha sigut recompensada a partir de l'any 1952 quan l'*origamista* va crear 12 figures que representaven els animals zodiacals orientals, publicant-los en la revista *Asashi-Graph*.

La seva gran aportació ha sigut la invenció del plegat humit⁵, amb la ajuda del qual va portar l'origami al nivell d'escultura, ja que es podien aconseguir figures amb un aspecte més natural. Yoshizawa era partidari de realitzar origami de la manera tradicional, sense utilitzar talls ni enganxar peces amb cola.

En tres ocasions, l'*origamista* va visitar Espanya, dos de les quals van ser en la ciutat de Saragossa i va col·laborar amb artistes espanyols. Al museu d'origami de la capital aragonesa han estat exposats més de 300 models fets per Yoshizawa .

Il·lustració 4: Akira Yoshizawa

FONT: <http://mallarddrake.blogspot.com/2005/03/akira-yoshizawa-1911-2005.html>



Éric Joisel (15 novembre 1956 – 10 octubre 2010)

Éric Joisel va néixer a França. Amb el pas dels anys, un cop arribat a la universitat, va decidir enfocar els seus estudis en l'àmbit de la història. En aquells temps el treball d'Akira Yoshizawa estava de moda, amb la qual cosa Joisel es va començar a interessar per l'origami així descobrint la seva vertadera vocació.

Al voltant de l'any 1995 l'artista comença a fer públiques les seves creacions les quals són majoritàriament tridimensionals i



Il·lustració 5: Éric Joisel

FONT: <http://www.pbs.org/independents/blog/between-the-folds-celebrating-origami-master-eric-joisel-in-france/>

⁵ Veure apartat 2.1

molt realistes gràcies a les tècniques inèdites que feia servir. Les seves figures semblen més aviat obres escultòriques molt impactants. Éric Joisel va ser l'artista que va introduir el concepte de "economia del paper" segons el qual la figura final d'origami no havia de contenir a l'interior parts del paper inicial.

Uns dels models més interessants que ell mateix ha desenvolupat són el ratolí (il·lustració 6) i el nan i a partir dels seus diagrames molts artistes els han doblat cadascú donant-li un toc personal.



*Il·lustració 6: Ratolí –
diagrama: Éric Joisel*

FONT de la imatge: Pròpia

*MODEL exposat a Escola-
Museu d'Origami de
Zaragoza*

Tomoko Fuse (1951- present)

*Il·lustració 7: Tomoko
Fuse*

FONT:
https://www.goodreads.com/author/show/90349.Tomoko_Fuse



Tomoko Fuse és una dona japonesa coneguda especialment per la seva implicació en l'àrea de l'origami modular, a la qual es va introduir per primer cop durant la seva infantesa. No es coneixen molts detalls sobre la seva vida, excepte del fet que va publicar més de 60 llibres amb instruccions per realitzar diversos models tant d'origami modular com d'altres (per exemple, caixes). Tomoko segueix sent un personatge molt influent i respectat en la comunitat d'*origamistes* i els seus models són una veritable font d'inspiració.

Robert Lang (4 maig 1961 – present)

Robert Lang és un físic americà i un prestigiós *origamista* el qual ha aconseguit fer avenços importants pel que fa la part matemàtica i computacional de l'origami, així com aplicacions seves en la vida real.



*Il·lustració 8: Robert
Lang*

FONT:
<https://stanfordmag.org/contents/the-mind-bending-artistry-of-robert-lang>

Lang va néixer a Ohio, a Estats Units. Anys més tard (el 1988), havent acabat la carrera d'enginyeria elèctrica i haver realitzat també estudis post universitaris, Robert Lang va començar a treballar per la NASA, concretament al *Jet Propulsion Laboratory*. Sorprenentment, el 2001, Lang ha decidit deixar la seva feina de la NASA, tot i ser una persona que hi ha aportat moltes bones idees, per dedicar-se exclusivament a l'estudi de l'origami.

Se'l va reconèixer i admirar internacionalment quan ha aconseguit doblegar un full de paper en forma de *Cuckoo Clock* amb moltíssims detalls realistes. Ara, Lang es concentra molt més en les aplicacions pràctiques de l'origami i també en la millora dels seus models amb l'ajuda de la informàtica.

Thomas (Tom) Hull



Il·lustració 9: Tom Hull

FONT:
<https://www1.wne.edu/news/2016/09/tom-hull-award.cfm>

Thomas Hull és un professor de matemàtiques a la *Western New England University* a Estats Units. Actualment, és una de les persones que més han contribuït en donar a conèixer la relació entre l'origami i les matemàtiques, al mateix temps que ha anat creant models propis espectaculars. Els seus articles així com la pàgina web que es troba sota la seva administració constitueixen un conjunt de materials fiables molt útils a l'hora de fer un treball sobre origami. Per aquest motiu i per la qualitat de les explicacions de Tom, al llarg del treball s'aniran citant obres seves .

Miguel de Unamuno (29 setembre 1864 – 31 desembre 1936)

Miguel de Unamuno va ser un dels escriptors espanyols més destacats de la seva època, i se'l coneix sobretot per les següents obres seves: *Paz en guerra* (1897), *Niebla* (1914) i *San Manuel Bueno, màrtir* (1933). A part del seu talent innat per la literatura, Unamuno també era un gran aficionat de l'origami (papiroflèxia) i li va donar un nom especial: *cocotologia*.

A diferència de l'origami a l'orient, a Espanya no es veia tant com un art sinó com una forma d'entretenir-se. Aquesta també era la percepció de Miguel de Unamuno però, no

obstant, ell va participar en nombroses exposicions d'origami i va contribuir a la seva difusió. El model que més li agradava doblegar i que ha quedat com un referent que cada vegada que es veu remet a Unamuno és la famosa *pajarita* (il·lustració 10).



*Il·lustració 10 :
Pajarita*

FONT: Pinterest

1.4.1 EMOZ

La *Escuela-Museo Origami de Zaragoza* o simplement EMOZ, és, com diu el seu nom, un museu d'origami situat a la capital aragonesa Saragossa. Si bé hi ha museus dedicats a l'origami al Japó o Corea del Sud, l'EMOZ és únic a Europa i per aquest motiu els aficionats a l'origami d'arreu del món no dubten en visitar-lo.

Saragossa és una ciutat en què l'origami ha estat sempre molt present degut a la forta implicació cultural desenvolupada per el *Grupo Zaragozano de Papiroflexia* el qual ha col·laborat al llarg dels anys amb *origamistes* espanyols com Miguel de Unamuno o fins i tot internacionals, com per exemple Éric Joisel i Akira Yoshizawa. Aquests artistes i d'altres menys coneguts han contribuït a la creació d'una vasta col·lecció de figures de paper que el dia d'avui es pot admirar recorrent els passadissos del museu.

A part de l'exhibició de figures , l'EMOZ compta amb una part de història de l'origami per situar el visitant en el temps, així com imatges i models tradicionals. A més a més, del museu formen part tota mena de models realitzats amb diverses tècniques i simbolitzant objectes diferents, animals, persones etc. Com a petita curiositat, el 2007 s'ha confeccionat una capa per la Verge del Pilar mitjançant mòduls d'origami.

He tingut la oportunitat de visitar aquest museu i poder guardar el record dels centenars de models exposats, en forma de fotografies (un recull dels més impressionants es troba a l'annex 1.2).

2 Models i bases

Cada model d'origami parteix d'una base concreta, la dificultat de la qual no determina necessàriament la complexitat de l'estructura final. Amb l'aparició de programes i algorismes informàtics és possible obtenir patrons dels quals obtenim figures detallades, que s'assemblen encara més a la realitat.

2.1 Tipus d'origami

Per tal d'atorgar les característiques que interessin a un model d'origami, es fan servir diverses tècniques per doblegar el paper o el material que s'està utilitzant. A vegades es vol obtenir un model més resistent, flexible o visualment estètic, al qual se li haurà de dedicar més temps i prestar molta atenció.

Origami modular

Anomenem origami modular aquelles figures que s'obtenen mitjançant la unió de múltiples unitats base (o mòduls) que es dobleguen individualment. Amb aquesta tècnica es realitzen majoritàriament models tridimensionals, molt estables ja que unint els mòduls s'ha augmentat el nombre de capes de paper del model. Hi ha diferents tipus de mòduls i depenent de com encaixen donaran lloc a un model o un altre. Gràcies a l'origami modular és possible crear una gran varietat de poliedres⁶ amb diverses cares iguals o diferents entre elles. A més a més, es poden introduir petites variacions per tal d'aconseguir un model estètic o fins i tot per fer estructures a gran escala reproduint conceptes matemàtics com els sòlids platònics o un tor⁷.

També, existeix el *Golden Venture Folding*, en el qual es fa ús només d'un sol tipus d'unitat base. En construir aquests mòduls s'uneixen per crear l'anomenat origami 3D.

Origami humit

Aquesta branca de l'origami és diferent de totes les altres ja que suposa la utilització de l'aigua per donar forma a l'estructura final. Molts *origamistes* fan servir aquest mètode

⁶ Poliedre= cos tridimensional format per cares (polígons), vèrtexs i arestes.

⁷ Veure apartat 3.2.4

quan treballen amb paper gruixut, i per tant de difícil doblegament, per donar-li la forma desitjada, la qual romandrà intacte després d'assecar-se. El famós Akira Yoshizawa, o fins i tot en Tom Hull són persones que han incorporat figures d'origami humit a la seva col·lecció.

Origami d'acció

El terme d' "acció" es refereix a la capacitat del model final de moure's. Això vol dir que aplicant una força externa al model (per exemple, fent servir les mans) aquest canvia de forma sense provocar-se danys (similar al moviment d'un ressort). Per l'altra banda, el dinamisme també pot venir donat abans de la finalització de l'objecte, quan a vegades cal introduir aire per inflar l'objecte.

Tessel·lacions

Les tessel·les són peces de diverses formes que col·locades una al costat de l'altre en un pla formen mosaics. Aquest concepte s'ha intentat transposar amb èxit en l'origami, a partir dels anys 1960, per Shuzo Fujimoto. Les tessel·lacions tenen un aspecte molt nítid i geomètric però tenen a més a més importància en la vida real, com és el cas de Miura-Ori⁸. Actualment, hi ha enginyers que fent servir la informàtica poden crear nous models de tessel·lacions i estudien si aquests realment es poden construir amb paper.

2.1.1 Alternatives al paper

Així com s'ha explicat al llarg de l'apartat de història de l'origami sabem que la majoria dels models estan fets de paper ja que les seves característiques el converteixen en un material perfecte per desenvolupar aquesta tasca. Degut a la creativitat i curiositat que els és característica, els *origamistes* no s'han limitat al paper només i han començat a buscar nous materials resistents que imitin els plecs del paper.

⁸ Veure apartat 4.1



Il·lustració 11: Tessel·lació Miura-Ori doblegada amb bioplàstic.

FONT:

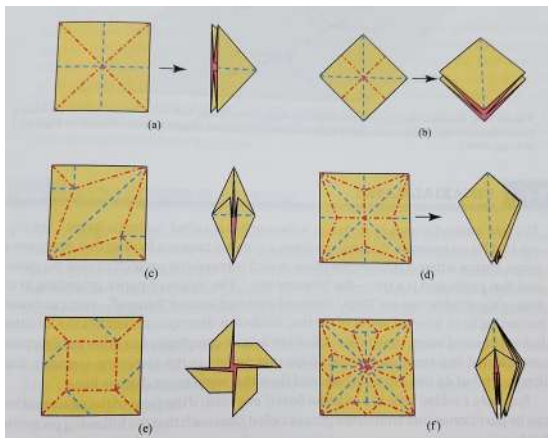
<https://tiktoqram.com/user/satorigami>

Així, han descobert que amb materials rígids, com la fusta, o amb més flexibles, com la tela, es poden construir figures simples i també algunes tessellacions. No obstant això, últimament s'està investigant com produir objectes amb materials biodegradables i aquesta tendència ha arribat també al món de l'origami. Samantha Teixeira, una jove de Brasil està realitzant el seu treball doctoral sobre l'origami i les seves aplicacions en la medicina, centrant-se també en un material un tal peculiar que ella utilitza: el bioplàstic. Ella mateixa fabrica làmines de bioplàstic fent servir materials naturals i de fet és una activitat que tothom podria fer a casa seva, ja que no s'usen productes perillosos per a la salut. Fins ara, Samantha només ha aconseguit doblegar una tessellació de tipus Miura-Ori amb el bioplàstic i utilitzant talls amb làser (il·lustració 11).

2.2 Bases i mòduls principals

Bases

Cada objecte d'origami fet per un únic full de paper parteix d'una base. N'existeix una multitud però en concret hi ha 6 que es consideren bàsiques i per tant cada principiant de l'origami hauria d'aprendre a construir-les.



Il·lustració 12: Bases principals i els seus corresponents patrons de línies



FONT: Geometric folding algorithms (llibre citat en la bibliografia)

Tal i com es pot observar a la il·lustració 12, cada base es pot desdoblegar per així poder contemplar el seu patró de línies. El patró és únic per a cada base. També, es veu que cada una de les bases es poden considerar com figures planes ja que es poden aixafar sense deformar-se.

Però, què és el que fa que un patró sigui únic i a més a més determini una base plana? Doncs la resposta sorprenentment es troba en les matemàtiques i a més a més es demostrarà mitjançant els

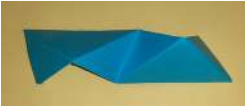


teoremes de Maekawa i Kawasaki, al llarg dels apartats 3.1.4 i 3.1.5.

Aquestes 6 bases han adquirit noms que majoritàriament són els noms de les figures que originen (per exemple, la base *f* s'anomena *base granota* ja que a partir d'ella és possible obtenir una granota). Seguint la numeració de la il·lustració 12 els noms són: *a* = base *waterbomb* (=bomba d'aigua); *b* = base preliminar; *c* = base peix; *d* = base d'au; *e* = base molí de vent; *f* = base granota.

A la mateixa il·lustració es pot observar que el model de línies de cada base està constituït per línies discontinues de color blau i línies vermelles on s'alternen punts i línies. Aquestes últimes representen doblecs en forma de muntanya  i les blaves doblecs en forma de vall .

Mòduls

Els mòduls d'origami es fan servir per fer figures modulares tridimensionals i, segons com es vol la figura final, cal utilitzar un tipus de mòdul o un altre. En la taula 1 es presenten 3 dels mòduls més utilitzats.

IMATGE			
NOM	Mòdul PHiZZ	Mòdul 60°	Mòdul SONOBE
CARACTERÍSTIQUES	<p>→ Construcció de pentàgons i hexàgons regulars</p> <p>→ En polígons de més de sis costats donen curvatura negativa</p>	<p>→ Construcció de polígons regulars amb angles de 60° (triangles equilàters)</p> <p>→ Fa possible la obtenció de poliedres amb moltes cares triangulars</p>	<p>→ És el més popular i s'hi poden fer modificacions per aportar diferents característiques al model</p> <p>→ Fa possible la construcció de cubs i poliedres amb cares en forma de poliedre de 90°</p>

Taula 1: Mòduls principals

3 Relació de l'origami amb les matemàtiques

Després d'haver fet un recorregut per la història de l'origami i haver conegut les nocions bàsiques, ja es pot passar a comentar el tema principal d'aquest treball. Els models d'origami han sigut estudiats per diversos grans matemàtics del món i a base de les seves observacions s'han establert correlacions entre l'art japonès de doblegar el paper i les matemàtiques. No només s'han creat nous teoremes i axiomes sinó que també s'han pogut comprovar d'altres més antics. L'origami, a més, es pot fer servir per resoldre uns dels problemes més estudiats de la història, ja que les seves característiques el converteixen en una eina més potent que el compàs i el regle sense graduar. Aquest apartat presentarà la matemàtica dels dos vessants principals de l'origami, el pla i el modular.

3.1 Matemàtiques en origami pla

Les figures d'origami es consideren planes si mantenen la seva forma després de col·locar-les entre dues superfícies planes (com pot ser un llibre). Uns exemples serien la grua o el vaixell de paper. Per estudiar les propietats d'un model d'origami pla cal desdoblegar la figura fins obtenir el paper en la seva forma original (un quadrat, rectangle etc.), que a més a més té les marques dels doblecs que s'han anat fent. D'aquesta manera s'està reduint un model complex a unes simples línies. Dos patrons de línies poden semblar molt diferents, però comparteixen les propietats que s'explicaran en aquest apartat.

3.1.1 Axiomes⁹ de Huzita-Hatori

Hi ha 7 axiomes fonamentals de l'origami que estableixen les construccions geomètriques que es poder realitzar mitjançant només un doblec. Amb altres paraules, aquests axiomes descriuen què es pot construir amb origami, ja que totes les operacions que es fan amb papiroflèxia tenen la seva base en les regles de Huzita. Aquestes regles reben el nom d'axiomes de Huzita-Hatori, també anomenades Huzita-Justin. Els 6 primers van ser

9 Un axioma és una afirmació matemàtica que s'accepta sense haver de demostrar-la.

descoberts l'any 1985 i el setè, tot i haver-hi un esbòs del 1989 fet per Jaques Justin va ser formulat oficialment l'any 2002 per el japonès Koshiro Hatori.

Robert Lang va estudiar detalladament aquestes propietats que el paper posseeix i va arribar a la conclusió de que no pot haver-hi més de 7 axiomes. Llavors, si només hi ha 7 operacions bàsiques com és possible arribar a crear figures tant summament complexes, amb tota mena de detalls realistes? Bé, realment aquests models es fan mitjançant una repetició contínua dels axiomes esmentats i la dificultat ve donada per altres factors així com les dimensions del paper i dels plecs o la grossor del foli.

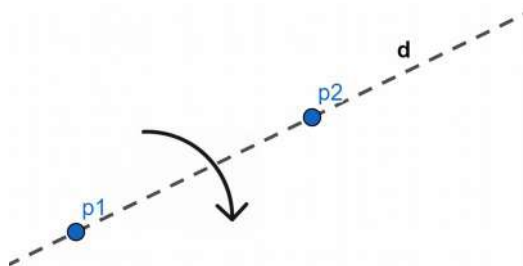
Els 5 primers axiomes i també el setè representen construccions que són realitzables amb regla sense graduar i compàs, dues eines fonamentals¹⁰. L'axioma número 6 però, no es pot fer ja que mitjançant un doblec es posicionen a la vegada un punt a una recta i un altre punt en una segona recta. Així, aquesta construcció suposa dibuixar una línia tangent a dues paràboles al mateix temps, cosa que amb els mètodes tradicionals no és possible. A continuació es representaran esquemàticament els 7 axiomes així com les seves definicions i explicacions matemàtiques. Les fletxes es fan servir per simular el plec, o sigui representen la manera de la qual s'ha de plegar el paper.

Axioma 1

Donats dos punts p_1 i p_2 podem fer un doblec que els connecti, o sigui que passi per ambdós a la vegada i així formant la recta d . Aquest axioma està relacionat amb el postulat de la Geometria Euclidiana que s'enuncia així : "Dos punts determinen una recta i només una".

Figura 1: Representació de l'axioma 1

FONT PRÒPIA



Aquest doblec no proporciona massa dificultat ja que és dels més simples que hi ha. En el cas que es volgués construir la recta d amb compàs i regla només s'haurien d'unir els dos punts amb l'ajuda de la regla.

¹⁰ El compàs i la regla sense marques són els instruments bàsics que feien servir els antics matemàtics per estudiar la geometria Euclidiana. Hi ha certes longituds que són impossibles de construir amb aquests objectes i és aquí on intervinrà, més tard, l'origami.

Axioma 2

Donats dos punts p_1 i p_2 podem doblegar el paper de tal manera que els dos punts es superposin. Així, obtenim la recta d la qual és alhora l'eix de simetria entre els punts i també la mediatriu¹¹ del segment que aquests formen, o sigui el p_1p_2 . Això vol dir que la recta d passa perpendicularment pel centre del segment p_1p_2 (que és el punt p_3), així com mostra la figura 2.

Donada la finalitat d'aquest plec resulta que es pot fer una construcció igual utilitzant les eines euclidianes (figura 3). Es comença per unir els dos punts amb l'ajuda del regle i a continuació es dibuixa una circumferència amb el centre a p_1 i radi una mica més gran que el segment p_1p_3 . Es repeteix el procediment en l'altre punt, mantenint el radi que hem escollit anteriorment. Els dos punts d'intersecció de les dues circumferències (A i B) es marquen i es dibuixa una recta que passa per aquests. Finalment, el dibuix final quedarà com en la figura 3.

Figura 2: Representació de l'axioma 2

FONT PRÒPIA

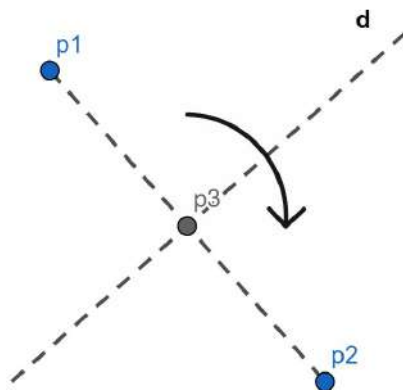
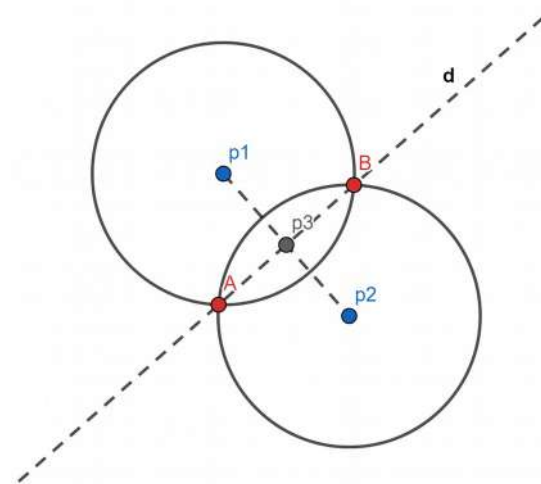


Figura 3: Representació de la mediatriu del segment p_1p_2 obtinguda mitjançant una construcció amb regle i compàs

FONT PRÒPIA



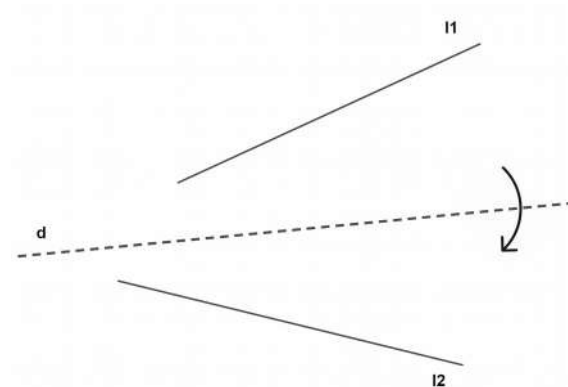
¹¹ Recta perpendicular a una altra i que passa pel seu punt mig.

Axioma 3

Donades dues rectes/segments l_1 i l_2 podem fer un doblec tal que les dues rectes es superposin (figura 4). D'aquesta manera ens resulta la recta d , la qual representa la bisectriu¹² de l'angle que formen les dues rectes quan s'intersecten.

Figura 4: Representació de l'axioma 3

FONT PRÒPIA



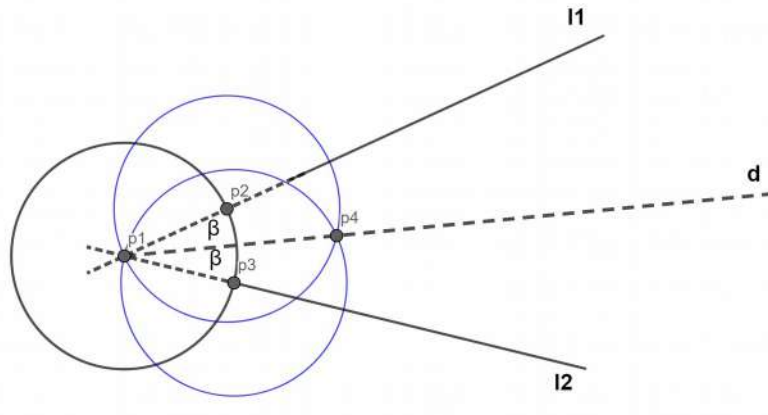
Donat aquest fet podem saber que aquesta mateixa construcció és possible fent servir compàs i regle. Aquest axioma es fa servir per fer diverses accions amb origami, com per exemple dividir un quadrat en dues parts iguals. L'axioma 3 té moltes maneres de ser representat ja que depèn de la posició en què estiguin les rectes. En el cas de rectes paral·leles sí que hi ha només una única manera de representar el doblec.

Per fer la construcció amb eines euclidianes (figura 5) cal allargar els segments usant el regle fins trobar el punt d'intersecció. Després, un cop tenim el punt, en aquest cas el p_1 veurem que l_1 i l_2 formen un angle γ . A continuació construïm una circumferència amb el centre a p_1 i radi qualsevol. Així, aquesta circumferència té un punt d'intersecció amb les rectes l_1 i l_2 i els anomenarem p_2 i p_3 respectivament. Ara, ja hem arribat en el moment en què fem el mateix que en l'axioma 2: construir circumferències (o només arcs) que tinguin el centre en aquests punts i radis p_1p_2 i p_1p_3 respectivament. Obtindrem així dos punts d'intersecció entre els dos cercles: un ja el coneixem (p_1) i l'altre l'anomenem p_4 . Finalment, amb el regle construïm una recta d que passa per p_4 i p_1 i ens resulten dos angles β congruents, els quals són la meitat de l'angle γ inicial.

¹² Recta que divideix un angle en dos angles més petits iguals.

Figura 5: Representació de la construcció de la bisectriu d'un angle usant regle i compàs

FONT PRÒPIA

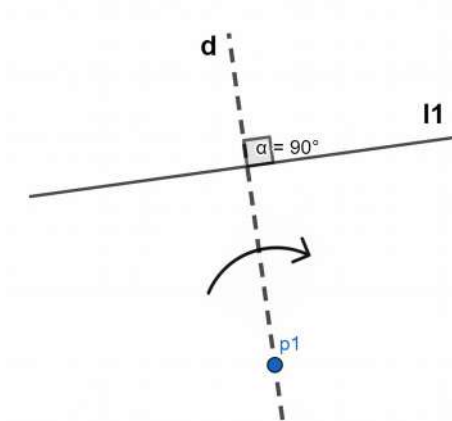


Axioma 4

Donats un punt p_1 i una recta/ segment l_1 podem construir, mitjançant un doblec, la recta d que és perpendicular a l_1 i passa per p_1 , tal i com es mostra en la figura 6.

Figura 6: Representació de l'axioma 4

FONT PRÒPIA



La recta d només es pot aconseguir mitjançant un únic doblec, o sigui que no hi ha més maneres de doblegar el paper per tal d'obtenir el mateix resultat. Amb regle i compàs també passa el mateix i per realitzar aquesta construcció s'han de seguir uns simples passos (figura 7).

Suposant que ja tenim dibuixat el punt p_1 i el segment p_2p_3 hem de fer servir el compàs per dibuixar una circumferència que té el centre en p_2 i el seu radi té la longitud del segment p_1p_2 . En quant al punt p_3 , també s'ha de dibuixar un cercle amb centre p_3 i radi p_1p_3 . Després, veurem que les dues circumferències s'intersequen en dos punts: p_4 i p_5 respectivament. Amb el regle fem una recta d que passa per aquests dos punts i ja tindrem la construcció acabada (figura 7).

El procediment s'assembla al de dibuixar una mediatriu d'una recta amb la particularitat de què el radi dels dos cercles no serà necessàriament el mateix, ja que la recta d no cal que passi pel centre del segment p_2p_3 .

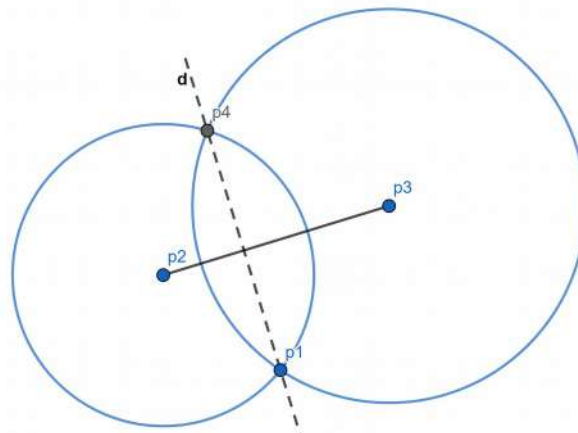


Figura 7: Representació de l'axioma 4 fent servir regle i compàs

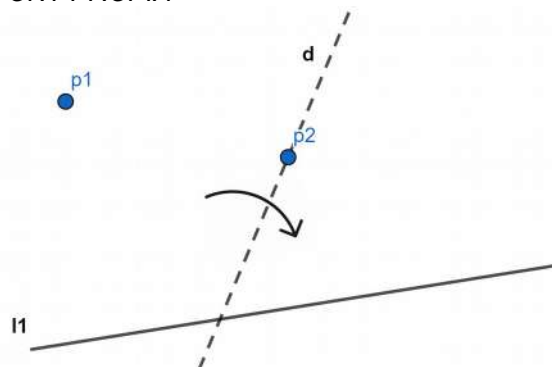
FONT PRÒPIA

Axioma 5

Donats dos punts p_1 i p_2 i una recta/ segment l_1 , podem fer un doblec tal que p_1 es posi en l_1 i la recta d que es forma passi per p_2 (figura 8). Aquest axioma a més de poder ser representat amb regle i compàs té una importància especial ja que ens permet resoldre equacions de segon grau. Fent servir una sèrie de repeticions de l'axioma 5 podem arribar a obtenir la representació gràfica d'una paràbola. La paràbola s'obté a partir d'una equació de segon grau i per tant dibuixant-la el que realment fem és resoldre l'equació.

Figura 8: Representació de l'axioma 5

FONT PRÒPIA



L'axioma 5 també es pot veure des d'un altre punt de vista, que és al mateix temps el mètode que s'empra per fer la construcció amb regla i compàs (figura 9): s'agafa el punt p_2 com a centre i la distància p_1p_2 com a radi i es dibuixa una circumferència. Aleshores, hi ha 3 casos possibles: la circumferència i la recta l_1 s'intersecten en un, dos o cap punts. Si no hi ha cap punt d'intersecció no es podrà representar la recta d i per tant a continuació s'estudiarà el cas en què sí hi ha intersecció amb l_1 . Conseqüentment, el fet de que hi hagi o bé un o bé 2 punts d'intersecció ve relacionat amb la propietat de l'axioma de resoldre equacions de segon grau (les quals tenen dos resultats).

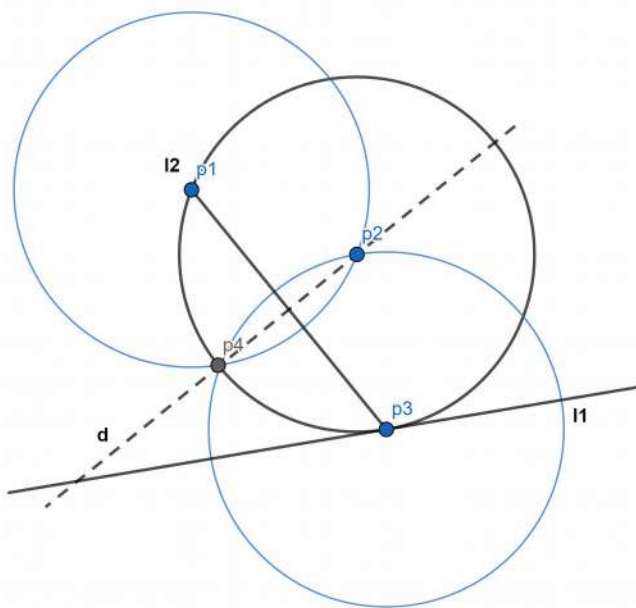


Figura 9: Representació de l'axioma 5 amb regla i compàs quan hi ha un punt d'intersecció

Agafant el cas en què existeix un únic punt d'intersecció (figura 9), el p_3 , cal traçar un segment (l_2), o millor dit una corda de la circumferència, que té els extrems a p_1 i p_3 respectivament. Llavors, l'únic que hem de fer és dibuixar una circumferència amb centre a p_1 i radi p_1p_2 . El mateix fem amb el p_3 . Així, ens resulten els punts d'intersecció dels cercles (p_2 i p_4) i unint-los obtenim la recta d , l'objectiu d'aquesta construcció.

FONT PRÒPIA

Quan hi ha dos punts d'intersecció p_3 i p_4 (figures 10 i 11) el procediment és el mateix. Això sí, podem obtenir dos resultats, o sigui, la recta d podrà tenir dos posicions diferents. Això depèn de si representem el segment p_1p_3 o el p_1p_4 . Ens trobarem la mateixa situació si estem treballant amb origami.

Figura 10: Representació de l'axioma 5 amb regla i compàs en el cas de realitzar el segment p_1p_4

FONT PRÒPIA

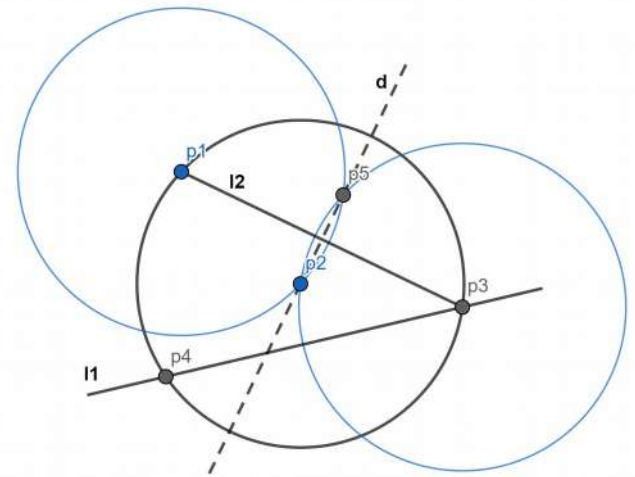
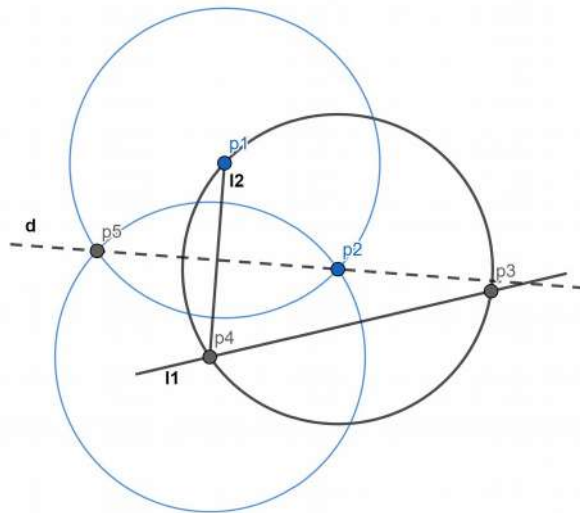


Figura 11: Representació de l'axioma 5 amb regla i compàs en el cas de realitzar el segment p_1p_3

FONT PRÒPIA

En el següent apartat s'exposarà la relació que una paràbola té amb l'axioma 5. Per això, és important dir que en les figures 8,9,10 i 11 tot i que no s'ha dibuixat la paràbola resultant per no carregar massa el dibuix, aquesta tindria el focus en el punt p_1 i la recta l_1 seria la directriu.

Relació amb les paràboles

A l'annex 2.1 es trobarà una breu explicació de la paràbola i els seus components per tal de tenir clars els conceptes que s'expliquen a continuació.

Després d'haver comprovat geomètricament l'axioma 5 i haver fet una petita introducció a les paràboles passem a determinar per què és possible l'obtenció d'una paràbola utilitzant aquest axioma. Farem servir un full de paper amb forma quadrada, en el meu cas amb dimensions de 21 x 21 centímetres (figura 12). Anomenem una aresta seva com a l_1 i coneixent l'axioma 3 podem trobar la recta l_2 que divideix el quadrat en dos rectangles iguals i passa pel centre de l_1 . Agafem un punt (F) en aquesta recta, no gaire allunyat de l'aresta de referència l_1 . A continuació agafem una sèrie de punts (com p_1 , p_2 , p_3 i p_4) els quals es trobin a prop d'alguna de les dues arestes del quadrat inicial, perpendiculars a l_1 . Conseqüentment procedim a doblegar el paper d'acord amb l'axioma 5, de manera que el punt F es posicioni en l_1 formant una recta d_n , que passa per un dels punts que hem

dibuixat al atzar. Així com mostra la figura 12, obtindrem moltes rectes d , algunes de les quals són: d_1 , d_2 , d_3 i d_4 que passen per p_1 , p_2 , p_3 i p_4 respectivament. Aquesta família de rectes d_n donen lloc a una forma que a simple vista podríem definir com a paràbola amb focus en el punt F , directriu l_1 i eix de simetria l_2 .

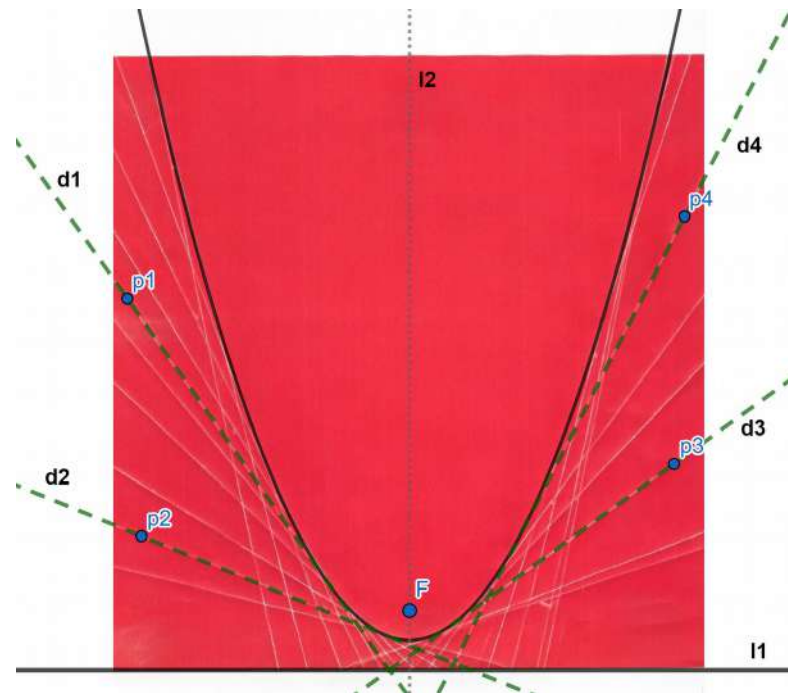


Figura 12: Obtenció d'una paràbola mitjançant repeticions de l'axioma 5

FONT PRÒPIA

Tot i així, per assegurar-nos que la construcció obtinguda és una paràbola veritable només cal agafar arbitràriament un punt de la mateixa, el qual s'anomenarà A (figura 13). Si el segment AB , perpendicular a l_1 , té la mateixa longitud que AF vol dir que sense dubte tenim una paràbola. L'afirmació que s'acaba de fer té lògica perquè concorda amb una propietat bàsica de la paràbola: qualsevol punt de la paràbola és equidistant tant del focus com de la directriu. Aquesta comprovació requereix la utilització d'alguna eina de mesura però si es vol obtenir el mateix resultat només amb paper també és possible.

Per tant, simplement es procedeix a tornar a doblegar per una línia d_n que s'ha fet mitjançant l'axioma 5. Abans de desdoblegar i fent servir un objecte afilat es dibuixa un segment tal i com mostra la figura 14. Desdoblegant s'observa que resulten dos

segments amb les mateixes característiques que AB i AF de la demostració anterior. La seva intersecció, que en aquesta figura és el punt X , representa el punt de tangència de la recta d_n amb la paràbola que es construirà.

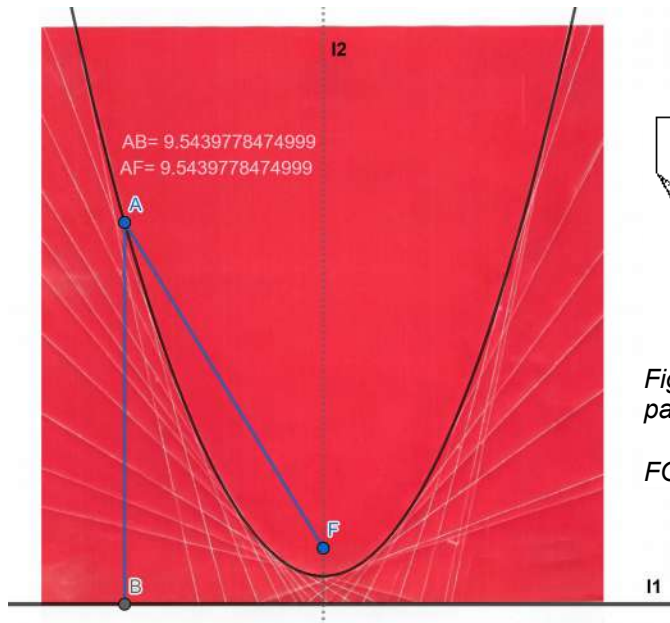


Figura 13: Demostració de la paràbola obtinguda repetint l'axioma 5

FONT PRÒPIA

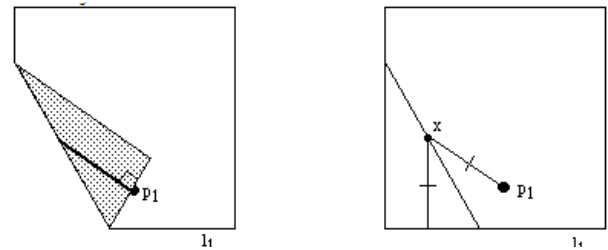


Figura 14: Demostració mitjançant doblecs de la paràbola obtinguda repetint l'axioma 5

FONT <http://origametry.net/omfiles/geoconst.html>

Corroborant tot el que ja s'ha comentat es pot confirmar que mitjançant l'axioma 5 és possible construir una línia tangent a una paràbola en un punt determinat. Amb altres paraules, amb origami resolem una equació de segon grau trobant el punt de tangència.

Axioma 6

Donats dos punts p_1 i p_2 i dos segments/ rectes l_1 i l_2 es pot, mitjançant un únic doblec, superposar al mateix temps p_1 en l_1 i p_2 en l_2 , així obtenint també la recta d .

Aquest axioma és equivalent en la geometria amb construir una recta tangent a dues paràboles al mateix temps. Com ja s'ha demostrat abans, l'axioma 5 ens permet construir una recta tangent a una paràbola donats dos punts i una recta inicials. Així doncs, podem considerar l'axioma 6 com una repetició de l'axioma anterior amb la particularitat de què el segon cop cal modificar les coordenades del focus i les de la directriu.

Ja que aquesta operació significa resoldre una equació de tercer grau, hi haurà 3 maneres de dibuixar una línia tangent a dues paràboles. Perquè s'entengui millor la demostració, representaré només una tangent, tant amb paper com geomètricament.

Aquesta construcció, com ja s'ha explicat anteriorment no es pot realitzar mitjançant compàs i regle sense graduar i és per això que l'origami constitueix una peça clau en la resolució de problemes que impliquen equacions de tercer grau.

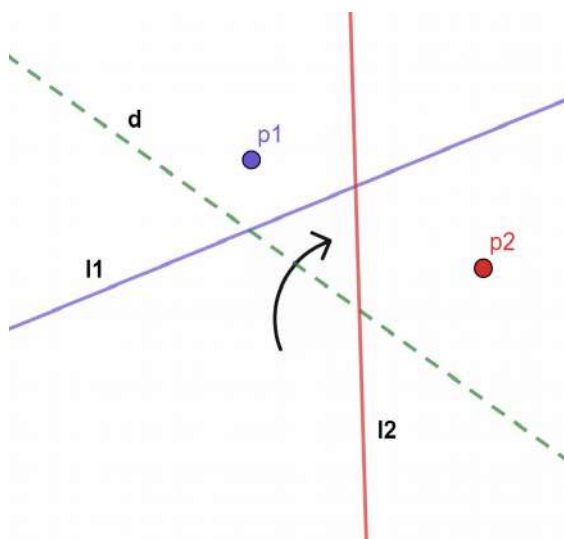


Figura 16: Representació de l'axioma 6

FONT PRÒPIA

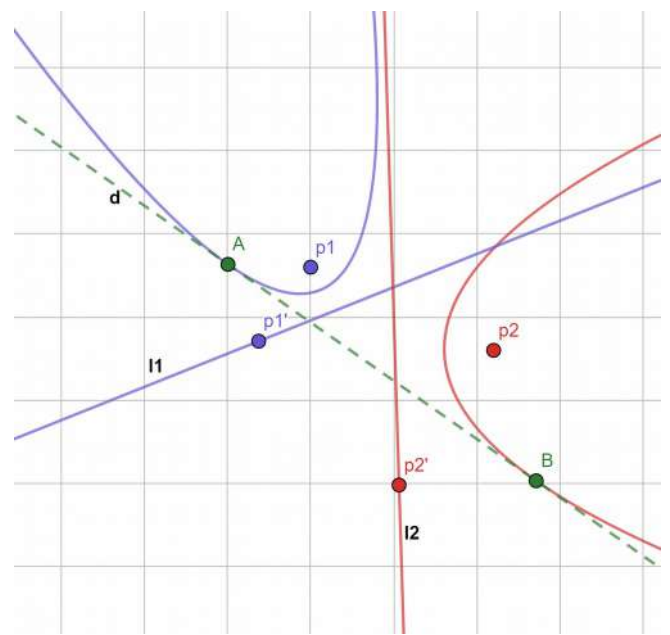


Figura 15: Representació geomètrica de l'axioma 6 amb tots els elements

FONT PRÒPIA

Tornant a la figura 16, es pot observar que la recta d constitueix un eix de simetria mitjançant el qual s'obtenen les imatges dels punts p_1 i p_2 justament en les rectes l_1 i l_2 respectivament. Si es vol veure una millor representació geomètrica d'aquest axioma en la qual apareixen dibuixades les paràboles així com els punts de les seves interseccions amb la recta d es pot trobar en la següent figura (15).

Axioma 7

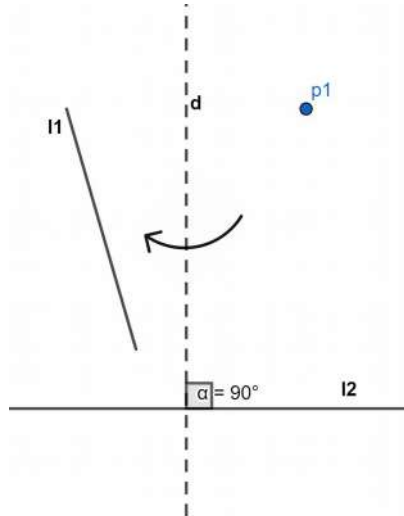
Donats un punt p_1 i dos segments/ rectes l_1 i l_2 podem fer un doblec tal que es formi una recta d perpendicular a l_2 i que al mateix temps fa que el punt p_1 es posi en l_1 .

Bàsicament, la recta d és un eix de simetria que fa que el punt simètric de p_1 es trobi en l_1 .

Com ja s'ha comentat al principi de l'apartat, l'axioma 7 també es pot construir mitjançant regle sense graduar i compàs. Per realitzar aquesta construcció només cal fer procediments semblants als de les construccions dels axiomes 3 i 4 respectivament.

Figura 17: Representació de l'axioma 7

FONT PRÒPIA



Com a paraules clau de les parts de construccions dels axiomes 3 i 4 tenim : bisecció d'un angle qualsevol i construcció una recta perpendicular a una altre i que passa per un punt donat. D'aquesta manera ens resulta que en algun moment de la construcció que es farà a continuació necessitarem aquests dos conceptes.

Com que el procediment de la construcció geomètrica de l'axioma 7 és molt extens, es poden trobar imatges dels passos en l'annex 2.2.

3.1.2 Equacions de tercer grau

Les equacions de tercer grau han estat molt estudiades sobretot pels antics matemàtics ja que són la base d'alguns problemes molt famosos, com els 3 problemes clàssics (3.1.3).

Com a fórmula general de les equacions de tercer grau tenim : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, on a, b, c i d s'anomenen coeficients.

Aquest tipus d'equacions no sempre és fàcil de solucionar ja que són molt més complexes que les equacions quadràtiques, les arrels de les quals es troben fàcilment

mitjançant la fórmula per l'equació de segon grau¹³. No obstant, les equacions cúbiques també tenen una fórmula semblant però no sol ser massa pràctica.

És possible resoldre equacions geomètricament, mitjançant la creació de segments i punts en un pla. A partir d'aquesta afirmació, Eduard Lill, l'any 1867, va idear un mètode [28] senzill per trobar les arrels d'una equació cúbica o de qualsevol grau però només si aquestes són reals, igual que els coeficients de l'equació.

Més tard, l'any 1936, Margherita P. Beloch es va adonar de que el mètode de Lill es podia aplicar a l'origami i així poder fer les construccions fàcilment. No és una coincidència que l'axioma 6 de Huzita-Hatori s'anomeni també *el doblec de Beloch* ja que és la clau de tot el procés de resolució de l'equació. Ella, a més, va demostrar que el mètode de Lill per la resolució d'equacions cúbiques és equivalent a la construcció del *quadrat de Beloch* [6] (figura 18).

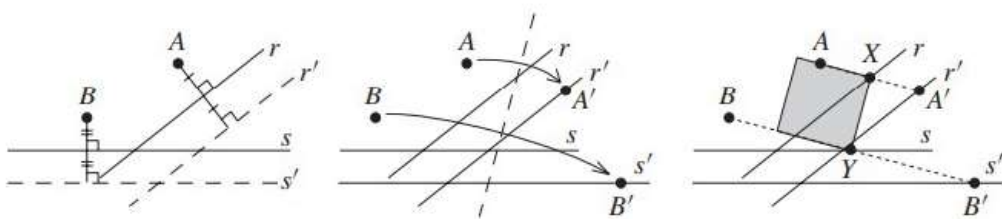


Figura 18: Construcció del quadrat de Beloch

FONT: <http://mars.wne.edu/~thull/papers/amer.math.monthly.118.04.307-hull.pdf>

Simplement, la construcció d'aquest quadrat parteix de dos punts A i B i dues rectes r i s inicials. Així com s'observa a la figura 18, el segment r' es construeix tal que sigui paral·lel a r i aquest es trobi just a mig camí entre A i r' . El mateix es fa per el segment s . A continuació, cal aplicar l'axioma 6 per posar A sobre r' (cal marcar aquest nou punt sobre r' com a A' ; així A' és el punt simètric de A respecte de la recta r) i B sobre s' (igual que abans, es marca B' obtingut sobre s'). Finalment, els punts X i Y es marquen a la meitat dels segments imaginaris AA' i BB' respectivament. Així, X i Y toquen les rectes inicials r i s i es pot dibuixar un quadrat de costat XY que passa per AA' i BB' al mateix temps.

13 Donada una equació de tipus $ax^2 + bx + c = 0$ es pot calcular x mitjançant: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Resolució d'una equació cúbica mitjançant el mètode Lill-Beloch

Per fer la següent demostració, cal tenir una equació, com per exemple:

$x^3 - 1,3x^2 - 2x + 1,2 = 0$, les arrels de la qual són 2, -1,2 i 0,5. S'intentarà obtenir aquestes mateixes arrels amb l'ajuda de l'origami.

En primer lloc, segons Lill, cal dibuixar en un full longituds corresponents al coeficients de l'equació (en el cas present, serien 1, -1,3, -2 i 1,2) partint d'un punt inicial A . Es comença amb el coeficient de la x de major grau (en aquest cas comencem per 1, ja que és el coeficient de x^3) i, perquè és positiu, el segment s'orienta cap a la dreta. A partir d'aquí es giren 90° en sentit antihorari (observeu figura 25 b; Tom Hull utilitza una tortuga per explicar-ho, si el coeficient és negatiu aquesta camina cap enrere i si és positiu, cap endavant; sempre fa un gir antihorari sense importar la seva posició; així, les regions a_3 i a_2 serien negatives). Es va seguint aquesta norma fins arribar a l'últim coeficient i acabant amb el punt B (figura 19).

El segon pas consisteix en traçar dos eixos de coordenades, r' i s' de la mateixa manera que es fa dibuixant el quadrat de Beloch (figura 20).

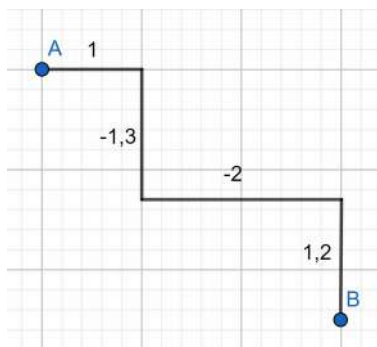


Figura 19: Primer pas del mètode Lill-Beloch

FONT PRÒPIA

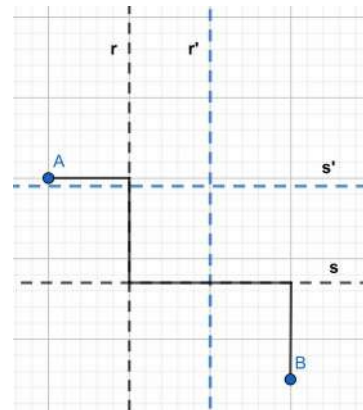


Figura 20: Segon pas del mètode Lill-Beloch

FONT PRÒPIA

A continuació, el tercer pas suposa l'acció de, mitjançant un únic doblec, aconseguir posar A sobre r' al mateix temps que B sobre s' . Això és justament l'axioma 6 que ens permetrà obtenir les arrels de l'equació. A partir de l'explicació de l'apartat d'axiomes de Huzita-Hatori ja es coneix que fer l'axioma 6 és equivalent a trobar una recta tangent al mateix temps a dues paràboles (vegeu figura 24), el que és igual a resoldre una equació

de tercer grau. Així, hi haurà 3 maneres de dibuixar aquesta tangent (en les figures és la recta d , la mateixa del doblec) i, depenent de quina es representa s'obté una arrel o una altra. Les figures de 21 a 23 mostren aquestes 3 possibilitats.

Figura 21: Tercer pas del mètode Lill-Beloch (a)

FONT PRÒPIA

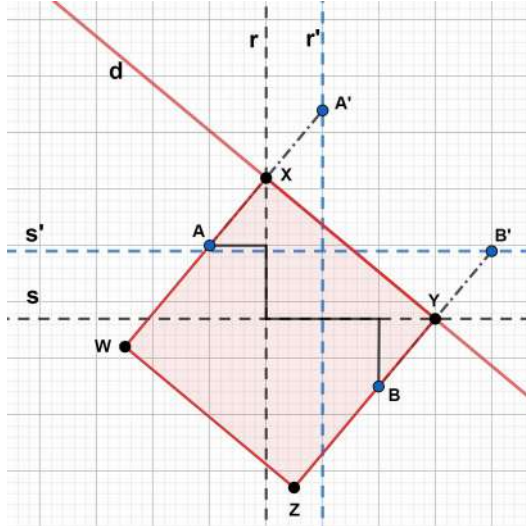


Figura 22: Tercer pas del mètode Lill-Beloch (b)

FONT PRÒPIA

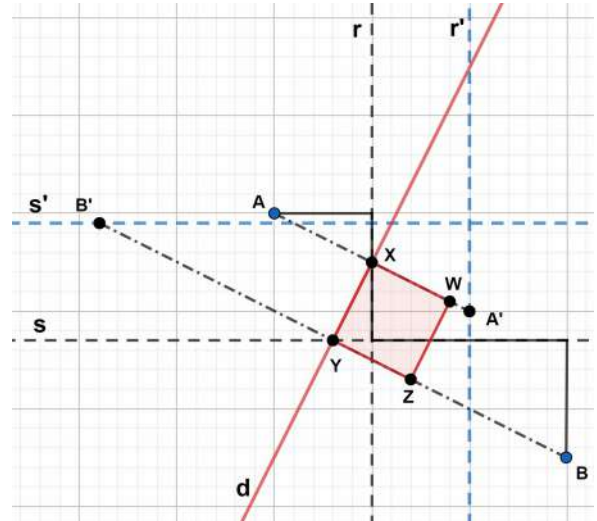


Figura 23: Tercer pas del mètode Lill-Beloch (c)

FONT PRÒPIA

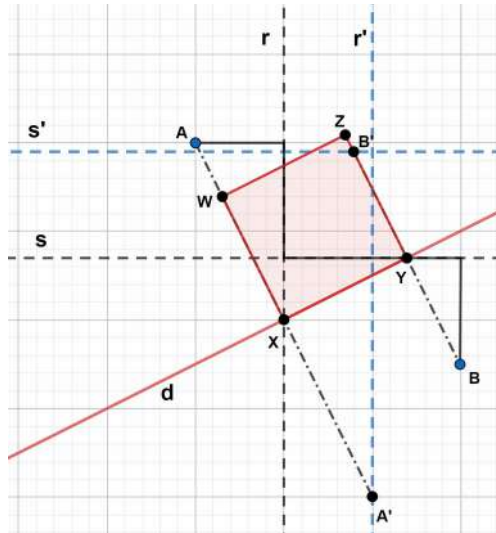
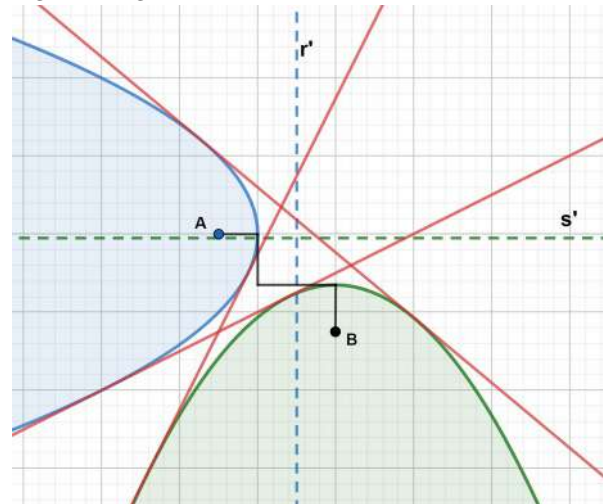


Figura 24: Representació de paràboles i línies tangents per el mètode Lill-Beloch

FONT PRÒPIA



En cadascuna de les tres figures anteriors s'ha ombrejat en vermell el posicionament del quadrat de Beloch, conforme amb la seva definició, per així observar que efectivament hi

ha una relació entre aquest i el mètode de Lill. En canvi, la figura 24 mostra dues paràboles: una amb focus A i directriu r' (color blau) i l'altre amb focus B i directriu s' (color verd). També es pot observar clarament la demostració de què realment les tres rectes d vistes abans són tangents a les dues paràboles al mateix temps.

El quart i últim pas representa trobar finalment les arrels de l'equació. Per això, cal tenir en compte els conceptes següents presents en l'article de Tom Hull citat [6]:

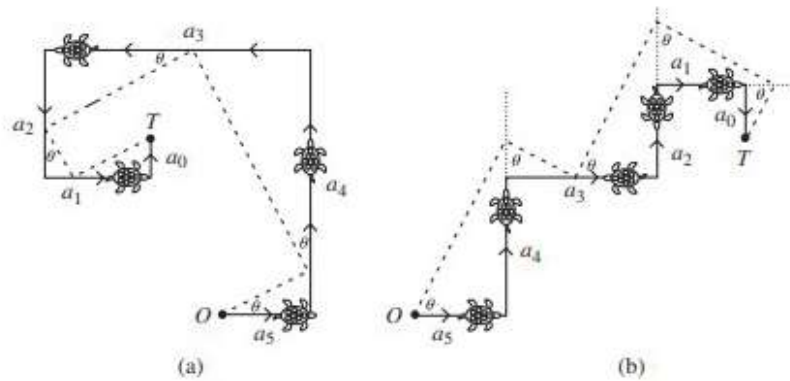


Figura 25: Explicació de Tom Hull del mètode Lill-Belloch

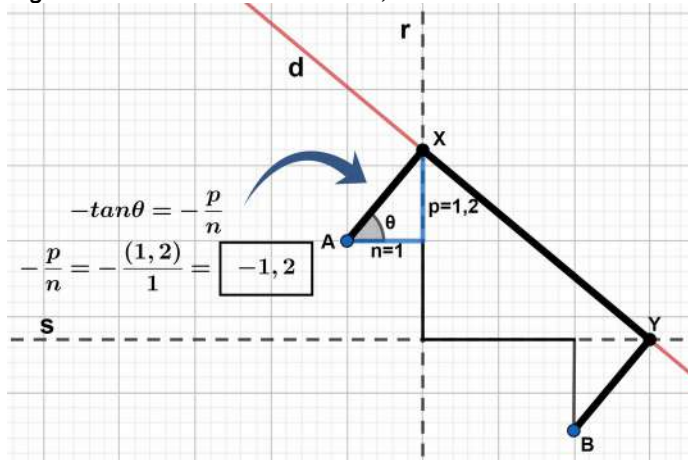
FONT: <http://mars.wne.edu/~thull/papers/amer.math.monthly.118.04.307-hull.pdf>

Tant en la figura 25 (a) com la 25 (b) es pot observar un seguit de línies discontinües que creen un camí per arribar del punt O al punt T (equivalents als punts A i B de les figures pròpies). Aquest fet es pot entendre en un sentit més visual com un làser que parteix del punt O amb un angle θ i cada vegada que el seu raig topa amb una "paret" rebota a 90° i finalment arriba a T . Degut a l'existència de tres rectes tangents mencionades abans resulta que hi ha tres possibles trajectes que el làser pot fer i per tant existeixen tres angles θ . En les figures 26, 27 i 28 amb línies negres gruixudes s'ha marcat aquest camí. Observant les mateixes figures veiem l'angle θ que el làser forma quan parteix de A i se sap que una de les arrels que estem buscant s'obté mitjançant la fórmula:

$$-\tan \theta = \frac{-p}{n} \quad (\text{cal tenir en compte que } p \text{ i } n \text{ poden ser negatius si estan orientats cap a}$$

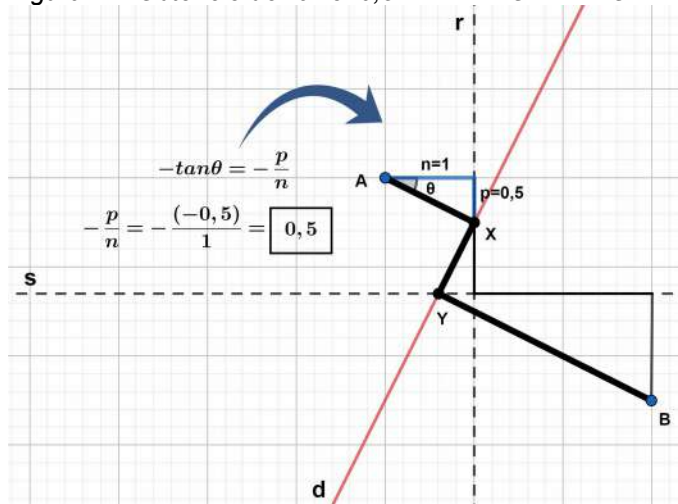
baix).

Figura 26: Obtenció de l'arrel -1,2 FONT PRÒPIA



és molt exacte però sí molt proper al correcte.

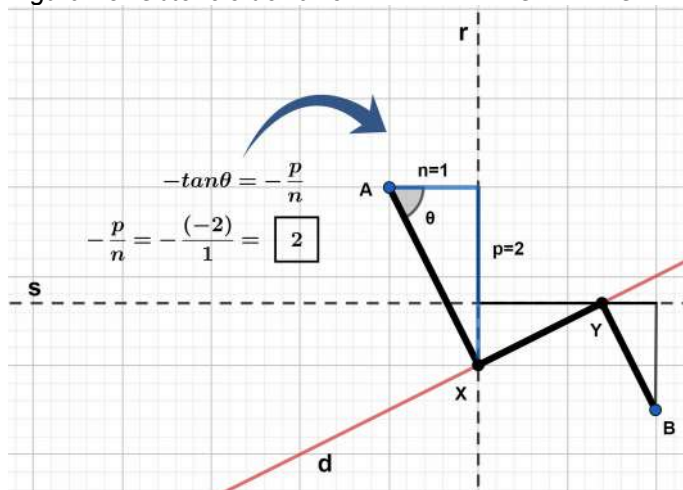
Figura 27: Obtenció de l'arrel 0,5 FONT PRÒPIA



A partir de la figura 26 'ha obtingut una de les arrels que s'estaven buscant a partir del triangle de costats blaus anomenats n i p els quals tenen valors de 1 respectivament 1,2 unitats de longitud (ambdues positives). Fent una simple divisió ens resulta l'arrel de valor -1,2 (cal recordar que en treballar amb origami i línies traçades a mà el resultat no sempre

El mateix passa en el cas de la figura 27, on $n=1$ i $p=0,5$. Recordi's que en la figura 19 quan s'han dibuixat els segments inicials el que conté el segment p era negatiu, el que vol dir que a l'hora de fer el calcul de la tangent haurem de considerar p amb valor negatiu. D'aquesta manera s'obté el resultat que toca, l'arrel de 0,5.

Figura 28: Obtenció de l'arrel 2 FONT PRÒPIA



Per últim, la figura 28 mostra l'obtenció de l'última arrel (2) mitjançant el mateix procediment que en les altres dues figures (noti's que el segment p és negatiu també, igual que la p de la figura anterior).

Per concloure aquest apartat i tenint en compte totes les demostracions anteriors s'arriba a la conclusió de què és cert que una equació de tercer grau es pot resoldre mitjançant origami, on el pas més important és la realització de l'axioma 6.

3.1.3 Els problemes clàssics grecs

Els matemàtics han estat sempre en busca de mètodes senzills per resoldre problemes més aviat difícils i així ensenyar que dominant conceptes bàsics es pot arribar a solucionar una multitud de reptes matemàtics. Alguns, imposen també una eina específica amb la qual es pot treballar i per tant la solució del problema només ha d'estar donada per aquest mètode concret.

Els antics grecs posseïen el mateix pensament, amb la qual cosa volien trobar solucions mitjançant construccions amb compàs i regle sense graduar. Així, amb aquestes dues eines es poden realitzar construccions molt complexes com la bisecció d'un angle qualsevol o la construcció d'una mediatriu d'una recta. Ara bé, hi ha també certs problemes la solució dels quals s'ha demostrat que és impossible d'obtenir utilitzant compàs i regle sense graduar. Concretament, n'hi ha tres d'importants: la duplicació d'un cub, la trisecció d'un angle qualsevol i la quadratura del cercle (no es tractarà).

Duplicació d'un cub

Aquest problema està fortament lligat a la mitologia grega i també es coneix amb el nom de "problema de Delfos". Segons la llegenda, es diu que al voltant de l'any 430 a. C hi havia una epidèmia de pesta a Atenes i ningú podia fer res per combatre-la. Per això, els grecs han decidit veure quina solució podrien trobar a l'oracle d'Apol·lo, a Delfos. Així, finalment el que havien de fer era duplicar el volum de l'altar en forma de cub d'Apol·lo. Els ciutadans han construït un altar l'aresta del qual mesurava el doble que l'original però la pesta encara no parava. Quin era el motiu? Havien fet una construcció errònia.

A partir d'aquesta llegenda s'ha formulat el problema de la duplicació del cub: donat un cub cal construir, mitjançant regle i compàs, un cub amb el doble del volum de l'original. Suposant que l'aresta del cub original és x es sap que el seu volum serà x^3 . L'error principal dels grecs de la llegenda ha sigut la creença que l'aresta d'un cub amb volum $2x^3$ és $2x$, cosa que no és certa ja que:

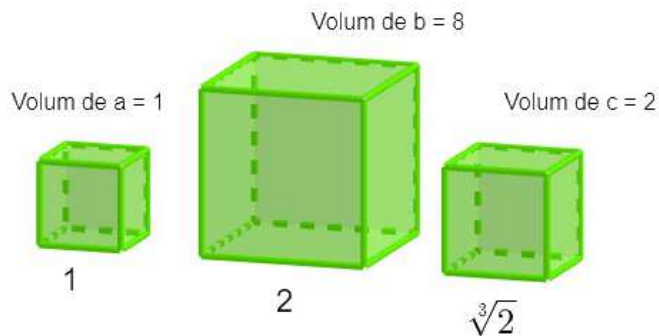
CUB ORIGINAL: aresta= x volum= x^3

CUB NOU: volum= $2x^3$ i per tant aresta= $\sqrt[3]{2x^3} = x\sqrt[3]{2}$

Si l'aresta del cub nou fos $2x$, el seu volum seria $8x^3$ i per tant no tindria un volum doble que l'original sinó vuit vegades més gran. En la figura següent es pot veure la diferència entre el cub original (a), el construït pels grecs (b) i el del volum doble (c), tots amb $x=1$.

Figura 29: Relació entre cubs de volums 1, 8 i 2 respectivament

FONT PRÒPIA

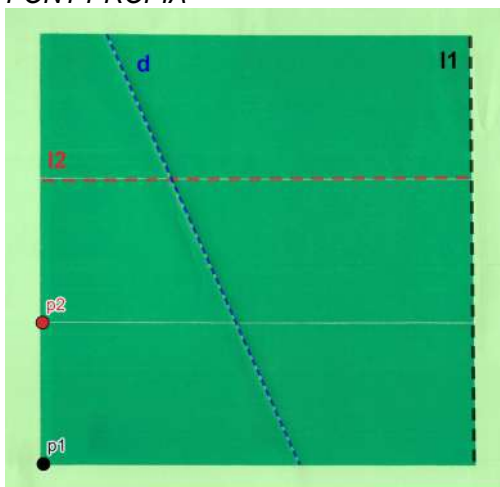


Si suposem que x és igual a una unitat, l'expressió de l'aresta del cub nou es simplifica a $\sqrt[3]{2}$. Així, cal construir un segment de longitud arrel cúbica de 2, cosa que és impossible amb regla i compàs (Wantzel, 1837) ja que suposa una equació de tercer grau. No obstant, una manera fàcil de fer-ho amb origami és justament mitjançant

l'axioma 6 (Peter Messer, 1985) que, com ja s'ha demostrat anteriorment, és equivalent a la resolució d'equacions cúbiques.

Figura 30: Marcatge de punts i línies importants i aplicació de l'axioma 6

FONT PRÒPIA



Com sempre, es comença amb un full de paper amb forma quadrada, en el meu cas amb les arestes que mesuren 18cm x 18cm. Es divideix el full en 3 parts iguals. Ara, marquem els punts p_1 i p_2 i els segments l_1 i l_2 . Un cop s'han localitzat els dos punts i els dos segments cal aplicar l'axioma 6 i d'aquesta forma obtindrem una línia d que col·locarà al mateix temps p_1 sobre l_1 i p_2 sobre l_2 (figura 30).

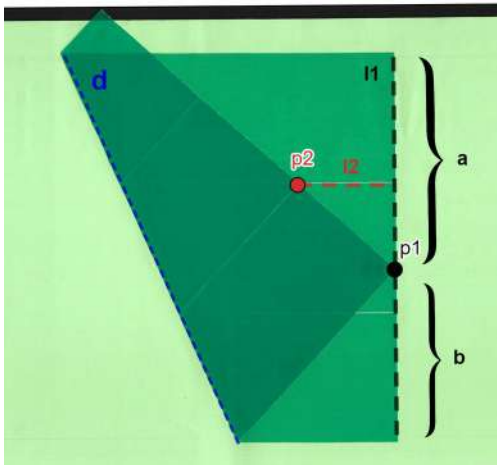
Es torna a doblegar el paper per la línia d i es marca el punt p_1 que ara està sobre l_1 (figura 31). S'observa que d'aquesta manera l_1 queda dividit en dues parts : a i b. Si es mesuren aquestes longituds obtingudes i conseqüentment es fa una divisió ens resulta

$$\text{que: } \frac{a}{b} \approx 1,25992104 \approx \sqrt[3]{2}$$

Així mateix finalment hem obtingut que donat un cub amb aresta= b i volum b^3 el cub que tingui volum= $2b^3$ tindrà aresta= a.

Figura 31: Obtenció de les arestes que dividides donen arrel cúbica de 2

FONT PRÒPIA



Fent la comprovació amb les longituds exactes donades per el meu full de paper de dimensions 18cm x 18cm s'obté que:

$a \approx 10$ i $b \approx 8$, així que $\frac{a}{b} \approx 1,25$ 1,25 és molt proper a $\sqrt[3]{2}$

Cal tenir en compte que el paper té un petit marge d'error ja que no és una eina que ens permeti obtenir resultats perfectes però sí molt propers a la realitat.

Trisecció d'un angle qualsevol

La trisecció dels angles també ha sigut un tema pel qual els grecs tenien molt interès i van provar de trobar-hi una solució. Malauradament, la trisecció no s'associa a cap història famosa com ha sigut el cas de la duplicació del cub però segueix sent un problema de gran importància.

Fins el segle V a.C ja es coneixia que fer la bisecció d'un angle qualsevol utilitzant els clàssics compàs i regla era relativament fàcil i per això els matemàtics es van plantejar la possibilitat de trisecar angles mitjançant aquestes eines. La trisecció i la bisecció d'angles, tot i semblar processos semblants tenen bases algebraiques molt diferents, ja

que trisecar un angle suposa la construcció d'un nombre¹⁴ donat per una equació de tercer grau, tal com es demostra a continuació (*Wantzel, 1837*):

Sigui l'angle de 60° el que volem trisecar resulta que hauria de ser possible la construcció de l'angle de 20° (ja que $60:3=20$). Per això, es fa servir la raó trigonomètrica de l'angle triple :

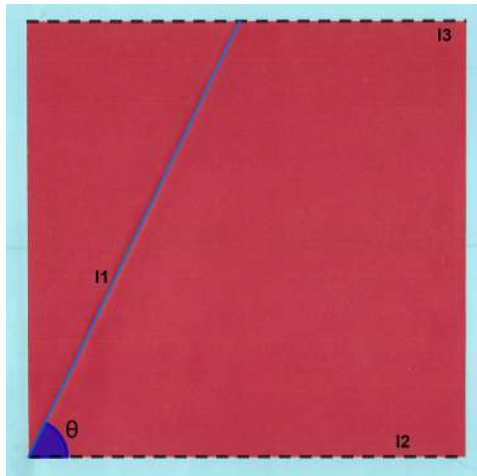
$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \quad \text{on } \theta=20^\circ \text{ i substituint: } \cos 60^\circ = 4(\cos 20^\circ)^3 - 3\cos 20^\circ$$

Si $\beta = \cos 20^\circ$ l'equació queda de la següent manera: $\frac{1}{2} = 4\beta^3 - 3\beta$ o bé $8\beta^3 - 6\beta - 1 = 0$

Amb $x = 2\beta$ s'obté l'equació cúbica irreductible següent : $x^3 - 3x - 1 = 0$ la solució de la qual no pertany als nombres racionals i per tant no es pot construir. Noti's que hi ha certs angles que sí es poden trisecar mitjançant mètodes diversos però que segueixen les normes del compàs i el regle sense graduar, com per exemple l'angle de 90° .

Figura 32: Trisecció: pas 1

FONT PRÒPIA1



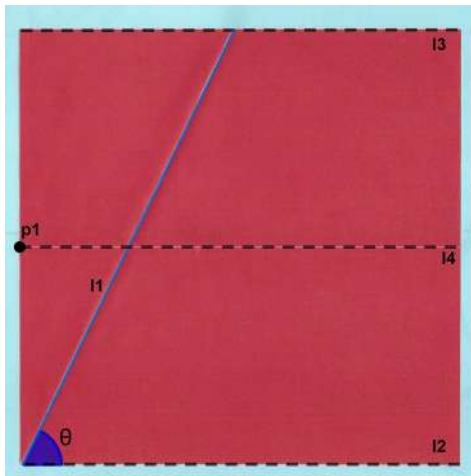
Si tornem a buscar una solució en el món de l'origami, la tornarem a trobar en el famós axioma 6 (*H. Abe*). La trisecció d'un angle qualsevol (això sí, ha de ser un angle agut) es realitza amb 5 doblecs, alternant els axiomes 1, 3 i 6 de la manera següent:

En un full quadrat de paper es marca un angle θ arbitràriament així com els segments l_1 i l_2 que el formen. A més a més, marquem també l_3 , que és paral·lel a l_2 . Apliquem l'axioma 3 donats l_2 i l_3 .

¹⁴ Els nombres que es poden construir amb regla i compàs han de poder-se obtenir mitjançant les quatre operacions bàsiques i/o arrels quadrades positives ja que el que es fa és dibuixar rectes i cercles (equacions quadràtiques). Així, un nombre donat per una equació cúbica no és una combinació d'aquestes operacions i per tant no es pot construir.

Figura 33: Trisecció: pas 2

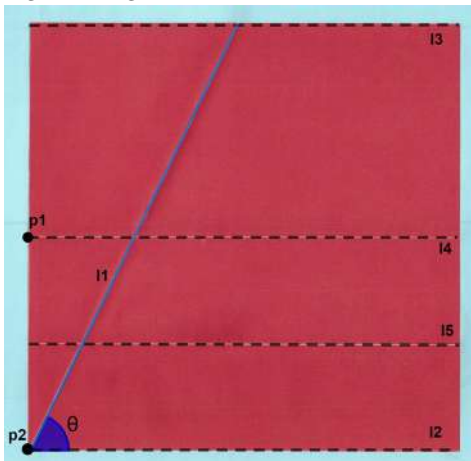
FONT PRÒPIA



Després del pas anterior, resulta el segment l_4 que equidista de l_2 i l_3 . A continuació cal dibuixar el punt p_1 tal i com mostra la figura. Donats l_2 i l_4 també és necessari aplicar l'axioma 3.

Figura 34: Trisecció: pas 3

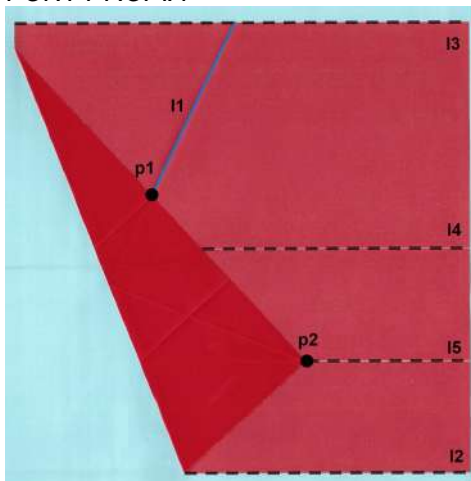
FONT PRÒPIA



Com a resultat, s'obté l_5 . El següent pas serà l'obtenció d'una recta d mitjançant l'axioma 6 i definitivament serà el moment clau per arribar a trisecar l'angle θ . Així, donats p_1 , p_2 , l_1 i l_5 caldrà superposar p_1 en l_1 i p_2 en l_5 .

Figura 35: Trisecció: pas 4

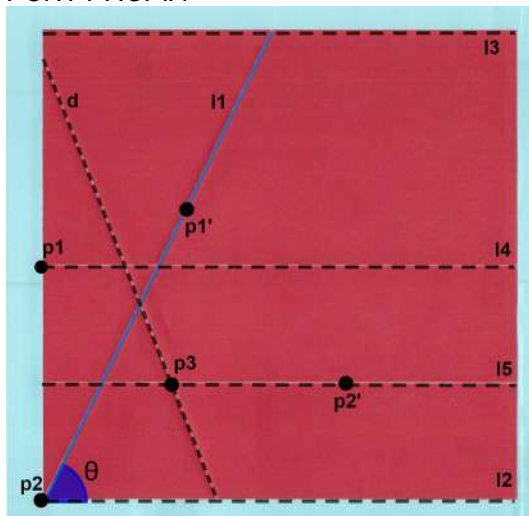
FONT PRÒPIA



Un cop realitzat el doblec de l'axioma 6 el full de paper quedarà com en la figura 35. Així, cal marcar els punts de les rectes l_1 i l_5 on ara estan p_1 i p_2 (els anomenarem p_1' i p_2').

Figura 36: Trisecció: pas 5

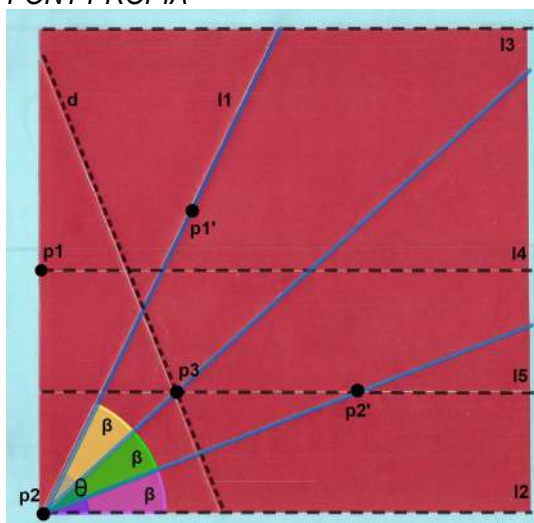
FONT PRÒPIA



Desdoblegant en paper anomenarem la línia del doblec com a d i a més a més és essencial trobar el punt p_3 d'intersecció amb l_5 . Ara, els últims dos passos consisteixen en realitzar simplement l'axioma 1 amb els punts p_2 i p_3 i el mateix amb p_2 i p_2' .

Figura 37: Trisecció: pas 6

FONT PRÒPIA



La construcció final queda com la figura 37 i així s'ha aconseguit triseccar l'angle θ tal que $3\beta = \theta$

La demostració de per què funciona aquest mètode ideat per H.Abe per triseccar un angle qualsevol es basa en construccions geomètriques i semblances (vegeu annex 2.3)

3.1.4 El teorema de Kawasaki

Aquest teorema serveix per esbrinar si un patró de línies pot determinar una figura plana. Com el seu nom indica, el teorema va ser pensat per primer cop per Kawasaki, als anys

1980 i les investigacions posteriors d'altres matemàtics l'han acabat de definir i demostrar. S'enuncia de la manera següent:

Un conjunt de línies d'un patró que parteixen d'un mateix punt determinen una figura plana si la suma d'angles alternats al voltant del punt sumen π (mesura en radians).

En la figura 38 s'ha representat el patró de línies que obtenim després de desdoblegar una grua de paper. L'alternança de línies i punts significa doblecs en forma de muntanya i les línies discontinues són els doblecs en forma de vall. Segons el teorema de Kawasaki, ja que la grua és una figura totalment plana, en cada vèrtex on coincideixen doblecs vall i muntanya (això sí, sense comptar els quatre vèrtexs i costats del quadrat de paper original) la suma dels angles pintats de vermell sumen 180° i la dels verds també.

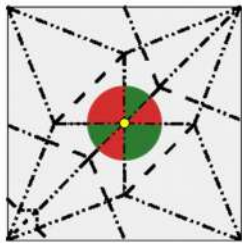


Figura 38: Patró de línies d'una grua amb un vèrtex A marcat

FONT: Tom Hull

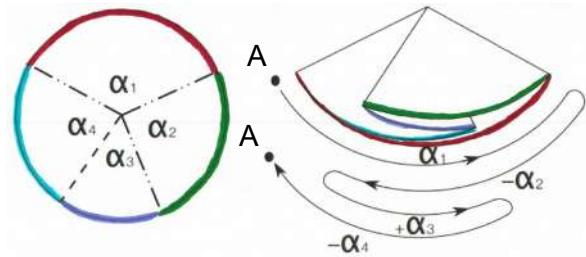
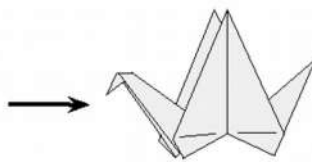


Figura 39 : Demostració del teorema de Kawasaki

FONT: Tom Hull amb modificacions pròpies

Una petita demostració de per què aquest fet és així es basa en les explicacions¹⁵ de Tom Hull sobre aquest mateix tema:

Observant la figura 39 es pot veure un model molt simple d'origami pla, amb un únic vèrtex. Aquest vèrtex està envoltat de quatre angles α_1 , α_2 , α_3 i α_4 , els quals sumen 360° per definició. En la figura 39 a l'esquerra s'han pintat els arcs que cada angle determina amb quatre colors diferents que es poden distingir perfectament després de doblegar el model (figura 39 dreta). Suposem que, igual que en la resolució d'equacions cúbiques, tenim una tortuga que recorre la figura doblegada seguint un camí que comença en el punt A. Així, si aquesta camina cap a la dreta serà direcció positiva i si és cap a l'esquerra serà negativa. D'aquesta manera la tortuga recorrerà dues distàncies negatives i dues positives i, corroborant-ho tot en forma d'equacions s'obté:

15 Veure: https://courses.csail.mit.edu/6.849/fall10/lectures/L20_images.pdf

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 360^\circ \quad \mathbf{1)}$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \leftarrow \text{ja que comença i acaba en el mateix punt A} \quad \mathbf{2)}$$

Fent la suma entre **1)** i **2)** resulta: $\alpha_1 + \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_4 = 360^\circ$

$2\alpha_1 + 2\alpha_3 = 360^\circ \rightarrow \alpha_1 + \alpha_3 = 180^\circ$ Per tant, s'ha obtingut que la suma dels angles alterns suma 180° , igual que s'ha afirmat en la definició del teorema.

El teorema de Kawasaki resulta molt útil si es vol fer un estudi per determinar com es doblegarà una figura i per tant si serà plana o no. També, els matemàtics amb més coneixements la utilitzen per fer demostracions complexes (per a més informació consulteu la pàgina web citada a la pàgina anterior).

3.1.5 El teorema de Maekawa

Semblant al teorema de Kawasaki comentat anteriorment, aquest altre teorema també ens dóna informació sobre la propietat de la figura d'origami d'adoptar una configuració plana. Així, Jun Maekawa va estudiar nombrosos models per finalment arribar a la conclusió de què en un vèrtex de la figura plana es troba un nombre de doblecs muntanya i un altre de doblecs vall. Aquests dos valors es resten i sempre s'obté una diferència (en valor absolut) de 2. Es diu que el resultat es dóna en valor absolut ja que:

FÓRMULA GENERAL $\rightarrow M - V = |2|$, on M =nombre de doblecs muntanya i V =nombre de doblecs vall. Si en la figura escollida hi ha més doblecs vall que muntanya llavors el resultat seria 2 en valor negatiu i si és al revés dona 2 positiu. Així, utilitzant valor absolut s'inclouen ambdues possibilitats. Anem a agafar un exemple de patró d'una figura plana per observar el teorema. La figura 40 mostra el patró i la 41 el model final (noti's que encara que no ho sembli, si es pressiona el full des dels costats drets cap al centre la tessellació resulta plana).

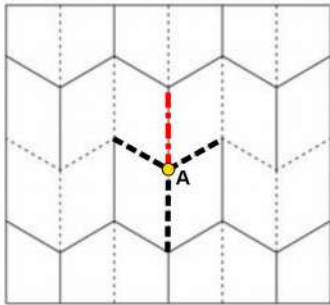


Figura 40 : Demostració teorema de Maekawa (a)

FONT:

<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.2015.0235>
(amb modificacions pròpies)

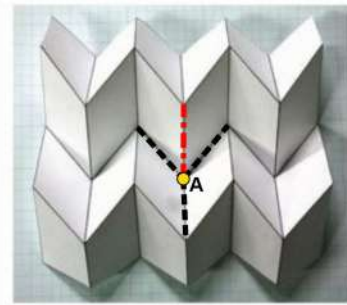


Figura 41 : Demostració teorema de Maekawa (b)

FONT:

<https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.2015.0235>
(amb modificacions pròpies)

En ambdues figures les línies vermelles són doblecs muntanya i les negres són valls. Tal i com es pot observar, hi ha tres valls i una muntanya al voltant del punt A. Per tant, substituint en el teorema de Maekawa:

$M - V = |2| \rightarrow 1 - 3 = |-2| \rightarrow 2$ Així, resulta que la diferència és de 2, tal i com enuncia el teorema.

3.1.6 Teoria dels grafes i la doble coloració

Un cop estudiat el teorema de Maekawa i després de consultar a l'annex 2.4 informació sobre els grafes ja es pot començar a esbrinar què representa la doble coloració en origami pla.

Aquesta teoria suposa que qualsevol patró d'origami pla en el qual es poden distingir diferents seccions (o polígons) es pot acolorir utilitzant dos colors (similituds amb el teorema dels quatre colors, consulteu annex 2.4), de manera que cada dos regions que comparteixen una aresta mai tenen el mateix color.

Tornant a fer referència al teorema de Maekawa, es recorda que en cada vèrtex (excepte dels que pertanyen a les arestes exteriors del paper) d'un patró d'origami pla coincideixen doblecs vall i muntanya i $M - V = |2|$. Així, resulta que en cada vèrtex

sempre hi haurà un nombre parell d'arestes/doblec que necessàriament donaran lloc a un nombre parell (el mateix nombre) de regions al seu voltant.

Generalitzant, tot el patró estarà format per un nombre parell de regions.

Per fer una petita demostració s'utilitzarà a continuació el patró de línies de la grua.

- a) Patró de la grua de paper amb tots els vèrtexs assenyalats (NOTA: per una millor visualització els petits doblecs del cap de la grua no s'han representat i al llarg dels passos següents s'utilitzarà la versió simplificada fig.43 ja que ja no serà necessari fer la distinció entre valls i muntanyes). Els vèrtexs negres no es tenen en compte ja que pertanyen a les arestes que delimiten el paper, en canvi, els vèrtexs de color rosa compleixen amb el teorema de Maekawa (veure figura 42) i conseqüentment cadascun té un nombre parell de regions al voltant.

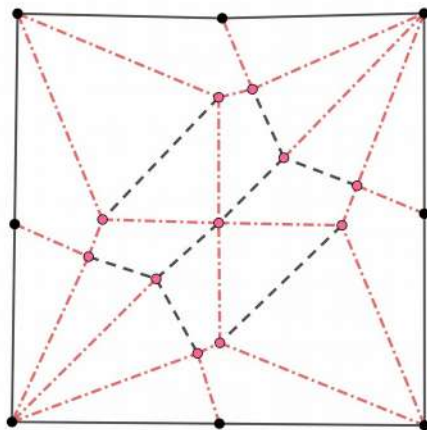


Figura 42: Doble coloració (1a)

Línies vermelles = doblecs muntanya

Línies negres discontinues = doblecs vall

FONT PRÒPIA

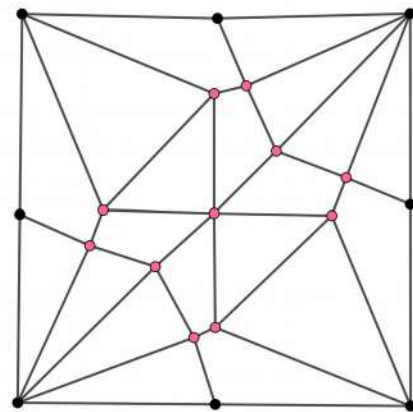


Figura 43: Doble coloració versió simplificada (2a)

FONT PRÒPIA

- b) Per explicar el fenomen de la doble coloració cal transformar el graf/patró anterior en un graf dual, de manera que a cada regió li correspon un vèrtex (en la figura 44, de color blau). També, les arestes (blaves) uneixen cada dues regions que comparteixen costat. Noti's que ja que hi ha un nombre parell de regions ara passa el mateix amb el nombre de vèrtexs blaus.

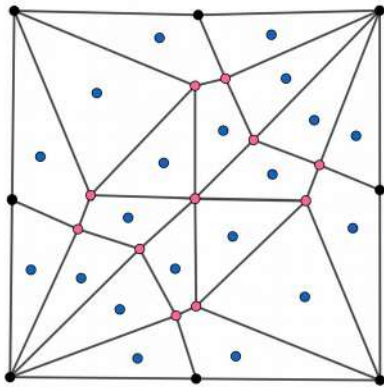


Figura 44: Doble coloració (1b)

FONT PRÒPIA

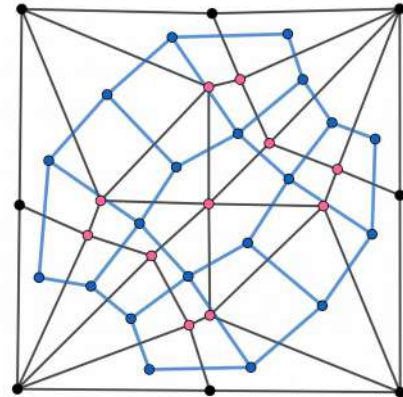


Figura 45: Doble coloració (2b)

FONT PRÒPIA

- c) Ara, ja hem obtingut el graf dual del patró de línies de la grua i de moment només ens fixarem en ell. Aquest graf, a part de tenir un nombre parell de vèrtexs, també conté un cycle hamiltonià (ombreat de blau) i, com ja se sap per la informació de l'annex, aquestes dues característiques fan que el cycle pugui acolorir-se alternant dos colors (o bé els vèrtexs o bé les arestes).

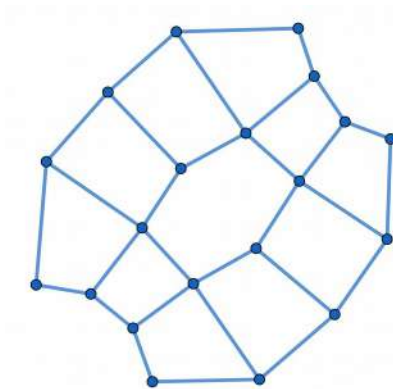


Figura 46: Doble coloració (1c)

FONT PRÒPIA

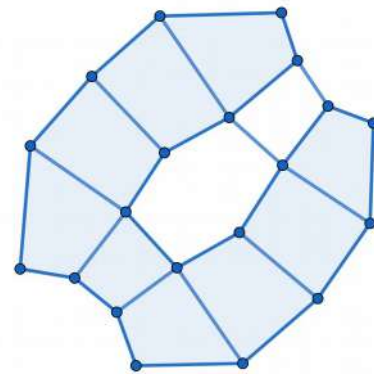


Figura 47: Doble coloració (2c)

FONT PRÒPIA

- d) Degut a la finalitat d'aquesta demostració, s'acolorixen els vèrtexs seguint el cycle hamiltonià amb només dos colors (groc i verd). Finalment, si tornem al patró inicial i tenim en compte que els vèrtexs verds i grocs del graf dual són les diferents

regions d'aquest patró, l'obtidrem acolorit de la següent manera (i, a més a més, és interessant el fet que si un cop acolorit el paper tornem a doblegar-lo en forma de grua aquesta quedarà groga en un costat i verda en l'altre):

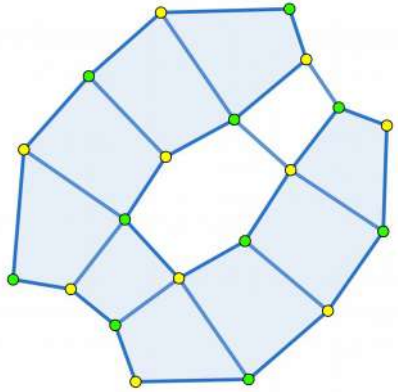


Figura 48: Doble coloració (1d)

FONT PRÒPIA

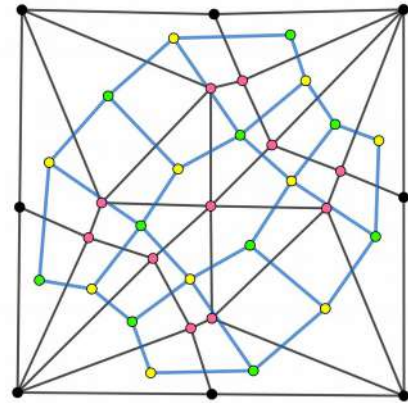


Figura 49: Doble coloració (2d)

FONT PRÒPIA

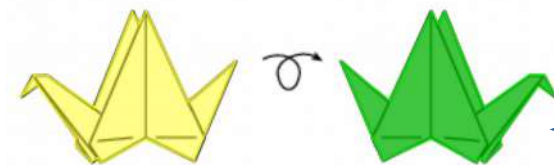


Figura 51: Doble coloració (4d)

FONT PRÒPIA

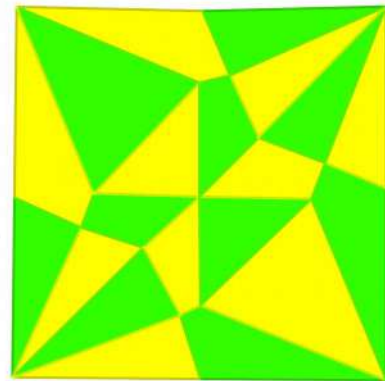


Figura 50: Doble coloració (3d)

FONT PRÒPIA

Així finalment s'ha demostrat que el patró de línies de la grua es pot acolorir amb dos colors de manera que dos regions que comparteixen costat tenen diferent color. Emprant coneixements de la teoria de grafs és molt fàcil entendre el perquè d'aquesta propietat de

l'origami i, una vegada més, s'ha aconseguit ensenyar la presència de les matemàtiques en l'origami.

3.2 Matemàtiques en origami modular

L'origami modular és tot un món encara no massa estudiat matemàticament. Però, si ens hi endinsem i arribem a entendre les figures geomètriques que es poden crear amb encaixament de mòduls, serem capaços de percebre amb més claredat les seves propietats i demostrar-les. En aquest apartat s'intentarà mostrar que una gran part dels poliedres que es coneixen es poden construir amb paper i que les seves característiques són molt més fàcils d'entendre quan visualitzem el model i el manipulem nosaltres mateixos.

3.2.1 Característica d'Euler

Aquesta característica s'estudiarà al llarg dels següents subapartats per a varis tipus de cossos geomètrics. Degut a això, caldria determinar què és i per a què s'utilitza.

La característica d'Euler o bé Euler-Poincaré és un nombre χ que s'obté fent operacions de suma i resta amb el nombre de cares, vèrtexs i arestes de qualsevol poliedre. Així:

$$\chi = V - A + C \quad \text{on: } V = \text{nombre de vèrtexs}; A = \text{nombre d'arestes}; C = \text{nombre de cares}$$

Ara bé, es sap que per a poliedres homeomorfs¹⁶ a una esfera aquest nombre χ serà igual a 2. Això passa per exemple amb els sòlids platònics. Per l'altra banda, aquesta fórmula pateix un canvi quan considerem el poliedre (el cub, per exemple) transformat en una esfera, ja que les arestes es corbaran, els vèrtexs apareixeran com a punts i les cares seran polígons. Per tant:

$$\chi(S) = \text{nombre de polígons} - \text{nombre d'arestes} + \text{nombre de punts}$$

¹⁶ L'homeomorfisme d'un poliedre a una esfera, en termes simples, consisteix en la propietat d'un poliedre (es suposa que està fet d'un material molt flexible) de deformar-se fins a formar una esfera.

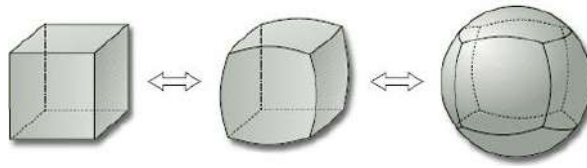


Figura 52: Exemple de homeomorfisme

FONT:

<https://www.open.edu/openlearn/ocw/mod/oucontent/view.php?id=4104&printable=1>

Aquesta expressió és vàlida per a qualsevol superfície compacta, com ara l'esfera o el tor. En la figura 52 aquesta variació de la característica d'Euler és fàcilment observable. Així:

El cub inicial és un sòlid platònic i per tant $\chi = 8 - 12 + 6 = 2$






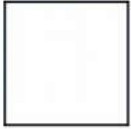
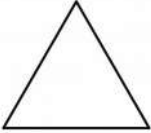
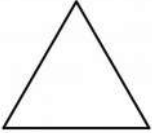
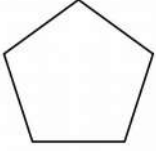
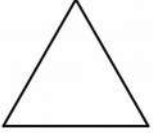
Transformant el cub en una esfera obtenim: $\chi(S) = 6 - 12 + 8 = 2$

3.2.2 Sòlids platònics

Havent parlat de la característica d'Euler és important conèixer que existeixen cinc poliedres regulars que posseeixen un valor de 2 per a aquesta característica. D'alguns es parlarà al llarg del treball i per això cal saber quines propietats té cadascun.

Aquests cinc poliedres són fàcilment construïbles amb la tècnica de l'origami modular. Les fotografies de la taula 2 dels poliedres són d'autoria pròpia i cada model està constituït per la unió de mòduls. Cal destacar que el cub és l'únic que està fet a partir de mòduls SONOBE mentre que el tetraedre i l'icosaedre contenen mòduls de 60° .

Vegeu annex 1.1 per a més detalls de la construcció dels models.

	CUB	TETRAEDRE	OCTAEDRE	DODECAEDRE	ICOSAEDRE
ESTRUCTURA					
FORMA DE LES CARES	Quadrat 	Triangle equilàter 	Triangle equilàter 	Pentàgon regular 	Triangle equilàter 
NOMBRE DE CARES	6	4	8	12	20
NOMBRE DE VÈRTEXS	8	4	6	20	12
NOMBRE D'ARESTES	12	6	12	30	30
CAR. D'EULER V-A+C	$8-12+6=2$	$4-6+4=2$	$6-12+8=2$	$20-30+12=2$	$12-30+20=2$

Taula 2: Els sòlids platònics

3.2.3 Buckyballs

"Buckyball" és el nom que rep l'estructura molecular anomenada buckminsterfullerè o futbolè.

El futbolè, que ha adquirit aquest segon nom degut a la semblança amb les pilotes de futbol, és molt estudiat en l'àmbit de la química perquè representa el carboni 60 (C_{60}), una molècula esfèrica formada per 60 àtoms de carboni (els vèrtexs) que configuren una tessellació de pentàgons i hexàgons. No obstant, les *buckyballs* també engloben altres tipus de fullerenes semblants al C_{60} , així com per exemple el C_{90} . Matemàticament, la definició de la *buckyball* és:

Una "buckyball" és un poliedre que presenta dues característiques : cada cara seva és o bé un pentàgon o bé un hexàgon i cada vèrtex té grau 3.

Aquesta definició no té problemes per ser entesa excepte la segona part, on s'anomena una propietat dels vèrtexs. Que un vèrtex tingui grau 3 vol dir que és comú a 3 arestes. Conseqüentment, si té grau 5, el vèrtex és comú a 5 arestes. Vegeu la representació d'una *buckyball*:

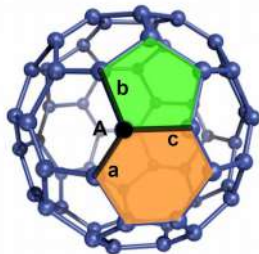


Figura 53: Buckyball (C_{60}) amb representació de components

FONT:
<https://thefreedomarticles.com/wp-content/uploads/2018/06/C60-fullerene-buckyball-2.jpg> (amb modificacions pròpies)

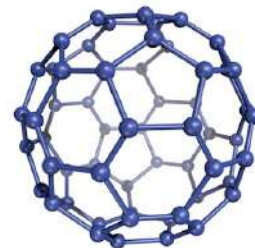


Figura 54: Buckyball (C_{60})

FONT:
<https://thefreedomarticles.com/wp-content/uploads/2018/06/C60-fullerene-buckyball-2.jpg>

En la figura 53 s'observen les dos característiques: el vèrtex A és comú a les arestes a , b i c , i per tant, de grau 3; l'estructura es forma a partir de pentàgons (polígon de color verd) i hexàgons (polígon de color taronja).

La configuració matemàtica de pentàgons i hexàgons és molt peculiar perquè, sense importar la grandària de la *buckyball* només poden haver-hi 12 pentàgons. Utilitzant la fórmula de la característica d'Euler, que s'ha presentat a l'apartat 3.2.1, es pot demostrar prenent com a exemple una *buckyball* amb 12 pentàgons i 20 hexàgons (C_{60}):

CARACTERÍSTICA D'EULER

PER UNA BUCKYBALL (de tipus C_{60}): $\chi(S) = V - A + C$ **1)**

$$\chi(S) = 60 - 90 + 32 = 2$$

S'ha obtingut el resultat $\chi(S) = 2$, fet que permet afirmar que la *buckyball* C_{60} és HOMEOMORFA a una esfera. Com que la proporció entre vèrtexs, arestes i cares es manté, o sigui que si es disminueix el nombre d'un, els altres nombres disminueixen en la mateixa mesura, resulta que les *buckyballs* en general presenten homeomorfisme a una esfera.

Per definició sabem que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{2C} \text{ (cada 2 cares comparteixen 1 aresta)} & \mathbf{2)} \\ \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{3A} \text{ (cada vèrtex és comú a tres arestes)} & \mathbf{3)} \\ \mathbf{C} = \mathbf{f_5} \text{ (no. pentàgons)} + \mathbf{f_6} \text{ (no. hexàgons)} & \mathbf{4)} \end{array} \right.$$

El nombre total d'arestes (A) hauria de ser igual a $5 f_5 + 6 f_6$, ja que cada pentàgon té 5 arestes i cada hexàgon en té 6, però, tenint en compte que cada aresta és compartida per 2 cares, estem comptant cada aresta dos cops, per tant: $5 f_5 + 6 f_6 = 2 A$ **5)**

Això passa també per el nombre total de vèrtexs (V), el qual s'obtidria sumant $5 f_5 + 6 f_6$ perquè cada pentàgon té 5 vèrtexs i cada hexàgon en té 6. Ja que cada vèrtex és compartit per 3 arestes, estem comptant cada vèrtex 3 cops i resulta: $5 f_5 + 6 f_6 = 3 V$ **6)**

Finalment, es substitueixen les equacions de 4,5 i 6 en l'equació **1)**, tenint com a incògnites només f_5 i f_6 . Tot i que no és obligatori, és millor multiplicar **1)** per 6 per no haver de treballar amb fraccions:

$$V - A + C = 2 \rightarrow \text{multiplicar per } 6 \rightarrow 6V - 6A + 6C = 12$$

$$\text{Substituint } \rightarrow 2(5f_5 + 6f_6) - 3(5f_5 + 6f_6) + 6(f_5 + f_6) = 12$$

$$10f_5 + 12f_6 - 15f_5 - 18f_6 + 6f_5 + 6f_6 = 12$$

La incògnita f_6 s'anul·la i finalment s'obté : $f_5 = 12$

Així, sense importar la mida de la *buckyball*, no poden haver-hi ni més ni menys de 12 pentàgons. El coneixement d'aquest fet és important a l'hora de construir la figura amb origami modular. Com que ja es sap el nombre de pentàgons que tindrà la *buckyball* d'origami, cal esbrinar també quants hexàgons es necessitaran.

Coneixent el valor de la variable f_5 només cal fixar quantes arestes o vèrtexs es volen en la figura. En el meu cas, he volgut construir una *buckyball* C_{60} i per tant amb $V=60$. Sabent que $5f_5 + 6f_6 = 3V$ s'obté:

$$5f_5 + 6f_6 = 3V \rightarrow 5 \cdot 12 + 6f_6 = 3 \cdot 60 \rightarrow f_6 = 20$$

Ara, es sap que el nombre de cares (C) és la suma de 12 i 20 i per tant un total de 32. Finalment, es necessita saber el nombre d'arestes i, com sempre, es substitueixen les dades conegudes en la fórmula d'Euler:

$$V - A + C = 2 \rightarrow 60 - A + 32 = 2 \rightarrow A = 90$$

Construcció de la *buckyball* C_{60} amb origami

Per construir aquesta figura es necessiten mòduls PHiZZ, ideats pel professor Tom Hull. Les instruccions per construir una peça PHiZZ es poden trobar a l'annex. Aquests mòduls tenen la capacitat de donar lloc a angles de 108° característics dels pentàgons regulars així com angles de 120° que formen hexàgons regulars. Per tant resulten perfectes per realitzar la *buckyball*.



Aquest mòdul representarà una aresta de la *buckyball* que es construirà i, ja que el C_{60} té 90 arestes, es necessitaran 90 mòduls

Figura 55: Mòdul PHiZZ d'iguals dimensions.

FONT PRÒPIA

Així, agafant 3 mòduls es poden encaixar de la següent manera (figura 56) i formar un vèrtex.



Figura 56: Unió de 3 mòduls PHiZZ

FONT PRÒPIA

Un cop s'ha creat un vèrtex, s'afegeixen peces fins obtenir un pentàgon o un hexàgon. Com es pot observar en la taula 3, el pentàgon que s'ha creat té una curvatura diferent a la de l'hexàgon. De què serveix? Doncs, la curvatura positiva dels pentàgons serveix per donar la forma esfèrica a la figura mentre que els hexàgons tenen una curvatura 0, amb la qual cosa no influeixen en la forma sinó que s'utilitzen per completar-la. A més, s'ha afegit una columna per un heptàgon i un octàgon que també es poden construir amb PHiZZ i seran especialment importants en l'apartat següent, quan es parlarà de la construcció d'un tor i no ara ja que la *buckyball* no presenta curvatura negativa.

TIPUS	PENTÀGON	HEXÀGON	HEPTÀGON	OCTÀGON
CONSTRUCCIÓ				
CURVATURA				
TIPUS DE CURVATURA	POSITIVA 	ZERO 	NEGATIVA 	NEGATIVA

Taula 3: Tipus de curvatura amb mòduls PHiZZ

Alternant els 12 pentàgons amb els 20 hexàgons de manera que cada pentàgon estigui envoltat per 5 hexàgons s'obté la figura final (figura 59), molt compacta i sòlida gràcies al sistema d'encaixament dels mòduls.

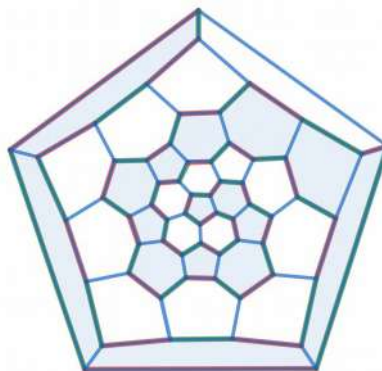
Coloració

Una activitat interessant que combina la teoria de grafs i les buckyballs fetes amb origami és intentar construir aquesta figura tal que cada vèrtex estigui format per tres mòduls PHiZZ de tres colors diferents. Per realitzar això, cal tenir presents conceptes relacionats amb els grafs (vegeu annex 2.4) ja que seran la clau per fer una construcció correcte.

Primerament, cal fer el desenvolupament de la buckyball C_{60} en forma de graf i marcar un dels possibles cicles hamiltonians (un camí que recorre tots els vèrtexs del graf i comença i acaba al mateix lloc), representat en la figura 57.

Figura 57: Graf de la buckyball C_{60} amb un cicle hamiltonià ombrejat

FONT PRÒPIA



Havent trobat el cicle hamiltonià sabem que és possible marcar-ho fent servir dos colors i alternar-los (en el cas de la figura 58, aquests 2 colors utilitzats són el verd i el vermell). Així, les arestes que no constitueixen el cicle s'acolorixen d'un tercer color (blau). Per tant, s'ha aconseguit pintar el graf de tal manera que cada vèrtex és comú a tres arestes de colors diferents. Ara, només cal seguir aquest esquema per encaixar els mòduls PHiZZ i construir la figura.

Figura 58: Graf de la buckyball C_{60} acolorit fent servir únicament tres colors

FONT PRÒPIA

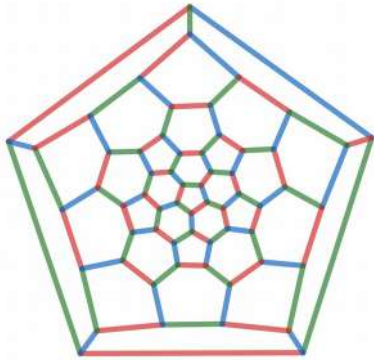


Figura 59: Buckyball C_{60} feta amb origami

FONT PRÒPIA



El procediment explicat a la pàgina anterior serveix també per a altres tipus de *buckyballs*, com per exemple el dodecaedre. Aquest és la *buckyball* més petita ja que té $f_5 = 12$ i $f_6 = 0$. Les figures 60 i 61 mostren el seu graf i un possible cicle hamiltonià corresponent. Finalment, la construcció acabada és la de la figura 62.

Figura 60: Graf del dodecaedre amb un cicle hamiltonià ombrejat

FONT PRÒPIA

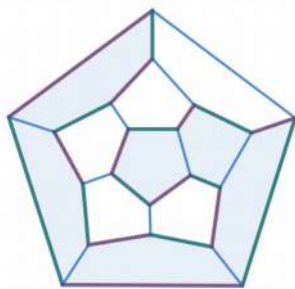


Figura 61: Graf del dodecaedre fent servir únicament tres colors

FONT PRÒPIA

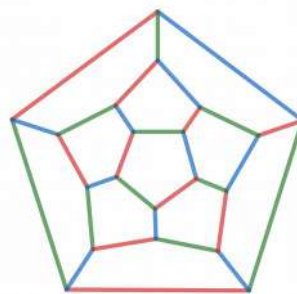


Figura 62: Dodecaedre fet amb origami

FONT PRÒPIA



Concloent aquest apartat es pot dir que el coneixement de les matemàtiques és imprescindible per poder realitzar correctament una figura d'origami modular, com la *buckyball*. Així, es pot saber exactament el nombre de mòduls requerits i és especialment important si es desitja construir una *buckyball* amb un nombre elevat de vèrtexs. A més,

s'ha demostrat que utilitzant la teoria de grafs és possible realitzar models amb mòduls de solament tres colors.

3.2.4 Tor

Un tor és una superfície tridimensional generada per el moviment d'un cercle seguint un eix de radi més gran i resulta una forma similar a un anell. N'hi ha de molts tipus, però el de la figura 63 és el més conegut.



Figura 63: Representació d'un tor

Cal observar que el tor no és homeomorf a una esfera ja que presenta un forat i, d'aquesta manera, es podria deduir que la gran majoria de poliedres o superfícies amb un forat son homeomorfes a un tor.

FONT:
https://en.wiktionary.org/wiki/solid_torus

Llavors, pel tor el valor de la característica d'Euler ha de canviar necessàriament i es converteix en 0 en lloc de 2. Així:

$$\chi = V - A + C = 0$$

El tor no té cares en forma de polígons però, amb l'ajuda de l'origami (amb mòduls PHiZZ) podem fer una representació d'un tor a partir de la unió de diversos pentàgons, hexàgons i altres figures. Així, estudiarem també quants n'hi haurà de cadascun. És important saber veure que el tor presenta 2 tipus de curvatura: positiva a la part més exterior i negativa cap a l'interior. Per això caldrà utilitzar pentàgons (donen curvatura positiva), heptàgons o polígons de més de 6 arestes (donen curvatura negativa) i finalment hexàgons (curvatura 0) per completar la figura.

Així com en les *buckyballs* s'ha demostrat que el nombre de pentàgons de la figura és sempre 12, pel tor es pot fer una cosa similar. A continuació es demostrarà quina relació hi ha entre els pentàgons que es construïran i els diferents polígons amb curvatura negativa (els anomenarem f_n , on n es el nombre d'arestes d'aquest polígon):

$$\text{CARACTERÍSTICA D'EULER PER UN TOR : } \chi = V - A + C = 0 \quad 1)$$

$$\text{Es sap que } \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{2C} \text{ (cada 2 cares comparteixen 1 aresta)} \quad 2) \\ \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{3A} \text{ (cada vèrtex és comú a tres arestes)} \quad 3) \\ \mathbf{C} = \mathbf{f_5} \text{ (no. pentàgons)} + \mathbf{f_6} \text{ (no. hexàgons)} + \mathbf{f_n} \text{ (no. d'altre polígon)} \quad 4) \end{array} \right.$$

El nombre total d'arestes (A) hauria de ser igual a $5f_5 + 6f_6 + nf_n$, ja que cada pentàgon té 5 arestes, cada hexàgon en té 6 i cada altre polígon en té n , però degut a $A \rightarrow 2C$ resulta que:

$$5f_5 + 6f_6 + nf_n = 2A \quad 5)$$

$$\text{De la mateixa manera, } 5f_5 + 6f_6 + nf_n = 3V \quad 6)$$

Seguint el mateix procediment que en l'apartat de les *buckyballs*, relacionem totes les igualtats entre si i s'obté:

$$V - A + C = 0 \rightarrow \text{multiplicar per 6} \rightarrow 6V - 6A + 6C = 0$$

$$\text{Substituint} \rightarrow 2(5f_5 + 6f_6 + nf_n) - 3(5f_5 + 6f_6 + nf_n) + 6(f_5 + f_6 + f_n) = 0$$

$$10f_5 + 12f_6 + 2nf_n - 15f_5 - 18f_6 - 3nf_n + 6f_5 + 6f_6 + 6f_n = 0$$

$$f_5 - nf_n + 6f_n = 0 \rightarrow f_5 = f_n(n - 6)$$

Per tant, s'ha obtingut una igualtat la qual és molt útil a l'hora de construir el tor amb origami. Veiem també que n pot prendre només valors més grans de 6, cosa que és certa ja que aquests són els polígons que tenen curvatura negativa (quan $n=7 \rightarrow$ heptàgon, $n=8 \rightarrow$ octàgon etc.) quan es realitzen amb mòduls PHiZZ.

Construcció d'un tor amb PHiZZ

Hi ha diverses maneres de construir un tor amb mòduls PHiZZ. El primer model construït, l'any 1999, pertany a Tom Hull i està fet per 660 peces. Més tard, l'italià Roberto Gretter

va aconseguir construir un amb només 555 mòduls requerits. En aquest apartat, però, es detallarà la construcció d'un tor fet per 360 peces PHiZZ, ja que és un model bastant més accessible de realitzar. Per agilitzar el procés el tor estarà fet només per pentàgons, hexàgons i heptàgons.

En primer lloc, ja que sabem el nombre de peces que es necessiten cal esbrinar el nombre de polígons, vèrtexs i arestes que es crearan. El nombre d'arestes és igual al nombre de peces, o sigui: $A=360$

Observem que les equacions **5**) i **6**) es podrien igualar i per tant trobar el nombre de vèrtexs:

$$5f_5 + 6f_6 + nf_n = 2A = 3V \rightarrow V = \frac{2A}{3} = \frac{2 \cdot 360}{3} \rightarrow V = 240$$

Substituint A i V en **1**) s'obté: $240 - 360 + C = 0 \rightarrow C = 120$

Abans de començar a construir es necessita un diagrama, o sigui, un esquema de com han d'enllaçar-se els diferents polígons per donar la curvatura correcta al tor.

Ja que el tor que es vol construir té 360 mòduls es necessita un diagrama adequat, com el de la figura 65, present a l'annex 1.1. Aquest diagrama mostra només una petita part del tor i per això caldria repetir-ho 6 cops per la part superior i 6 més per la part inferior, així aquestes parts queden simètriques.

En acabar la figura, per també assegurar que s'ha realitzat correctament, es compten, tant de la part superior com inferior els pentàgons (f_5), hexàgons (f_6) i heptàgons (f_7) i resulta:

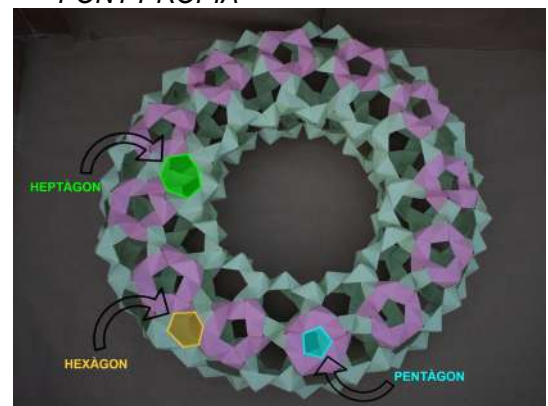
$$\left. \begin{array}{l} f_5 = 24 \\ f_6 = 72 \\ f_7 = 24 \end{array} \right\} \text{COMPROVAR SI:}$$

$$f_5 = f_7 \quad \checkmark$$

$$f_5 + f_6 + f_7 = 24 + 72 + 24 = 120 \rightarrow C \quad \checkmark$$

Figura 64: Tor realitzat amb 360 mòduls PHiZZ

FONT PRÒPIA



4 Aplicacions de l'origami en la vida quotidiana

A partir del moment en què es van trobar les relacions que l'origami té amb les matemàtiques es va començar a plantejar la següent pregunta: Quins avantatges podria aportar l'origami a la vida real?

4.1 Doblec de un mapa (Miura)







El doblec Miura o bé Miura-Ori forma part de la categoria de tessellacions ja que s'origina un mosaic de polígons amb angles de 60° en el full i sense deixar espais lliures. També, el Miura-Ori pertany a l'origami rígid. Com ja s'ha comentat anteriorment, l'origami es pot realitzar també amb altres tipus de materials a part del paper, els quals en alguns casos concrets (com és el Miura-Ori) poden ser rígids, com la fusta o el plàstic.

El seu nom prové de Koryo Miura, el creador del Miura-Ori. Mitjançant aquest model és possible obrir i tancar un mapa de grans dimensions amb un simple moviment però també s'ha utilitzat com a inspiració per a un mecanisme que ha permès el transport d'uns panells solars cap a l'espai (veure taula 4). A partir d'aquests aconseguiments altres *origamistes* han començat a proposar noves idees de models que ajudin a resoldre problemes pràctics. Així, un model inspirat en la *base bomba d'aigua* ha impulsat l'aparició del prototip del *stent* (veure taula 4).

4.1.1 El coeficient de Poisson

La característica més important del Miura-Ori és el fet de tenir alhora un coeficient de Poisson negatiu i positiu. Aquest coeficient és un valor comprès entre -1 i $0,5$ que és constant per a cada material elàstic i ens dona informació sobre el seu comportament a l'hora d'estirar-lo. Els materials amb coeficient positiu són els més freqüents ja que són els que si s'estiren en una direcció es comprimeixen automàticament en la direcció perpendicular (veure annex 3). Els que tenen coeficient negatiu (com el Miura) els passa la situació contrària i ja que n'hi ha en un nombre molt petit tenen molt valor en el món de l'enginyeria. Consulteu annex 3 per entendre per què el doblec Miura té alhora valors negatius i positius.

Taula 4: Algunes aplicacions pràctiques de l'origami

APLICACIONS DE L'ORIGAMI					
Salut		Espai		Altres	
Prototip d'un <i>stent</i> ¹⁷	Robot comestible	Panells solars espacials	Telescopi espacial	Refugis plegables	Escut protector envers les bales
					
Dissenyat per Zhong You (2003)	Dissenyat per investigadors MIT, de la Universitat de Sheffield i Tòquio.	Dissenyat per investigadors de la NASA	Dissenyat per Robert Lang i altres investigadors de la NASA	Dissenyat per l'arquitecta Tina Hovsepian	Dissenyat per la Brigham Young University
Al ser construït amb la tècnica de l'origami té la capacitat d'entrar en les artèries i, un cop allà expandir-se molt i realitzar la seva funció com a <i>stent</i> .	És un robot que es pot comprimir de tal manera que es pot ingerir. Conté un petit imant que resulta útil en casos d'ingestió de piles ja que per mitjà d'un camp magnètic exterior la pot portar fora de l'organisme.	En els coets que viatgen a l'espai no hi ha gaire lloc per transportar objectes de mides grans. Aquest panell està pensat per plegar-se durant el viatge i a l'espai estendre's fàcilment sense patir danys.	Semblant al cas dels panells solars els telescopis també han de poder transportar-se de la manera més fàcil possible. Tot i estar fet per materials rígids, un patró d'origami corresponent és la base d'aquest prototip de telescopi.	Aquests refugis poden constituir-se de diversos materials i un ús útil que se'ls pot atribuir és per ajudar la gent que perd les seves cases després d'un desastre natural.	L'escut està constituït per capes gruixudes de <i>kevlar</i> , una fibra resistent a les bales. És de molt fàcil utilització i pot protegir més d'una persona alhora.

17 Un *stent* és un dispositiu mèdic de forma cilíndrica i de mida petita. La seva funció és desobstruir les artèries i per tant facilitar una millor circulació de la sang en pacients que pateixen diverses malalties cardiovasculars.

5 Conclusions

Ja ha arribat l'hora d'acabar el Treball de Recerca i, al cap de tots aquests mesos, puc afirmar que amb el meu treball he aconseguit els objectius que em vaig proposar i demostrar que realment hi ha matemàtiques en l'art de l'origami.

El camí no ha estat gens fàcil: abans de començar a redactar vaig haver de realitzar una cerca intensiva d'informació i, degut a la baixa investigació en aquesta àrea només vaig trobar uns pocs documents útils però amb un contingut de gran qualitat. A continuació, calia decidir quins models d'origami construiria i quines propietats matemàtiques s'hi veurien involucrades per així poder entendre-les bé i explicar-les posteriorment. Finalment, en tenir totes aquestes qüestions fixades vaig iniciar la redacció i paral·lelament vaig anar construint els models per tal de demostrar les meves explicacions.

A l'hora de construir les figures d'origami modular el problema principal va ser el fet de no disposar de paper més resistent i gruixut per la qual cosa alguns models no posseeixen massa estabilitat. A part de les construccions físiques, per aquest treball s'ha requerit la realització de figures per recolzar la teoria utilitzant GeoGebra i aquest fet em va permetre millorar les meves habilitats d'aquest programa.

En relació a les conclusions matemàtiques cal esmentar que l'estudi de l'origami permet endinsar-se en temes que no figuren en el programa de batxillerat i per tant aprendre conceptes diferents als que s'està acostumat. Uns exemples serien la teoria de grafs, que s'ha vist que està relacionada amb la coloració de *buckyballs* i models d'origami pla, la resolució d'equacions de tercer grau pel mètode de Lill-Beloch i les paràboles associades. A més, per mitjà de l'origami es poden posar en pràctica els coneixements de geometria, com passa en la resolució de dos problemes clàssics, la duplicació del cub i la trisecció d'un angle. Finalment, apropant-se més cap l'àrea tecnològica s'han presentat aplicacions de l'origami que ajuden a la millora de la nostra vida.

Per últim, dir que aquest treball ha sigut un èxit ja que m'ha canviat la percepció que tenia inicialment de l'origami, ensenyant-me que aquest passatemps traspasa els límits del full de paper i ens dona a conèixer un nou món abstracte, el món de les matemàtiques.

6 Fonts d'informació

6.1 Bibliografia

- DEMAINE, D. Erik; O'ROURKE, Joseph. *Geometric folding algorithms*. Nova York: Cambridge University Press, 2007.

6.2 Webgrafia i referències¹⁸

- 1) Combined PHiZZ topology (en línia). <https://aimathcircles.org/wp-content/uploads/2017/04/Combined_Phizz_Topology.pdf>
- 2) GARCÍA DÍAZ, Alberto. *Teoría de Galois tras el origami* (en línia), Treball Fi de Grau, juliol 2017. <<https://riull.ull.es/xmlui/bitstream/handle/915/5795/Teoria+de+Galois+tras+el+origami.+Por+que+el+origami+resuelve+los+problemas+geometricos+clasicos+de+la+Antigua+Grecia..pdf;jsessionid=8523E0A93D20299AF90CC8B8611147AD?sequence=1>>
- 3) HELGERUD, Ruth. *Trisection of the Angle: From Ancient Greece to 1900* (en línia). Texas A&M University, (04-04-2011). <https://www.math.tamu.edu/~mpilant/math646/MidtermProjects/Helgerud_midterm.pdf>
- 4) HULL, C. Thomas. *On the Mathematics of Flat Origamis* (en línia), University of Rhode Island. <<https://pdfs.semanticscholar.org/1ab2/e6e827156c648e6a2ff4d97fe03437d74014.pdf>>
- 5) HULL, C. Thomas. *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics, Second Edition* (llibre en línia). <https://books.google.es/books?id=blvSBQAAQBAJ&pg=PA218&lpg=PA218&dq=geogebra+how+to+make+folds&source=bl&ots=ES3jgXSraM&sig=ACfU3U29hShZ_DyLBt3aWiBWdhEqJlFPA&hl=ro&sa=X&ved=2ahUKEwjn_ZnkiODjAhXTIFwKHSgaD5sQ6AEwF3oECAgQAQ#v=onepage&q=geogebra%20how%20to%20make%20folds&f=false>
- 6) HULL, C. Thomas. *Solving Cubics With Creases: The Work of Beloch and Lill* (en línia), revista Monthly (abril 2011). <<http://mars.wne.edu/~thull/papers/amer.math.monthly.118.04.307-hull.pdf>>
- 7) JCCC ORIGAMI CRANE PROJECT. *Meaning of the origami crane* (en línia). <https://www.jccc.on.ca/origami-cranes/pdf/meaning_of_the_origami_crane.pdf>
- 8) ROYO PRIETO, José Ignacio. *Matemáticas y papiroflexia* (en línia). Universidad del País Vasco. <https://www.cimat.mx/Eventos/TJCsecundaria2008/03_Mats-y-Papiroflexia.PDF>

¹⁸ Els llocs web citats de l'1 al 10 són articles en PDF amb autors coneguts i alguns es citen al llarg del treball (exemple: [6]). La resta són blogs o simples webs que també s'han citat (exemple: [28]).

- 9) SCHENK, Mark; GUEST, D. Simon. *Origami folding: A Structural Engineering Approach* (en línia), 14-09-2010. <<http://dl.icdst.org/pdfs/files/7ebaab2827227060e6e9a869e3289df6.pdf>>
- 10) WEI, Z.Y; MAHADEVAN, L, et. al. *Geometric Mechanics of Periodic Pleated Origami* (en línia), 24-05-2013. <<https://www.seas.harvard.edu/softmat/downloads/2013-09.pdf>>
- 11) Características del papel. <<https://www.caracteristicas.co/papel/>>
- 12) "Cocotología" y don Miguel de Unamuno.
<<http://rociodiazgomez.blogspot.com/2013/02/cocotologia-y-don-miguel-de-unamuno.html>>
- 13) Coeficient de Poisson. <https://ca.wikipedia.org/wiki/Coeficient_de_Poisson>
- 14) Combinatorial geometry. <<http://origametry.net/combgeom/combgeom.html>>
- 15) Cultura e informació Inma. <<https://culturaeinformacioninma.com/2015/03/27/origami/>>
- 16) EMOZ. <<http://www.emoz.es/>>
- 17) Geometry of the universe. <<http://abyss.uoregon.edu/~js/cosmo/lectures/lec15.html>>
- 18) La aparición del papel en la humanidad. <<https://kemekuen.com/la-aparicion-del-papel-en-la-humanidad-2/>>
- 19) LALOO, Manisha. *Applied origami*, desembre 2014. <<https://www.ingenia.org.uk/Ingenia/Articles/29834eb1-0b2a-4050-868b-0a30d5d20a4a>>
- 20) Lang origami. <<https://langorigami.com/>>
- 21) Mathematics of paper folding. <https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_paper_folding>
- 22) Mathigon. <<https://mathigon.org/course/euclidean-geometry/origami>>
- 23) Miura Map folding and unfolding.
<<https://demonstrations.wolfram.com/MiuraMapFoldingAndUnfolding/>>
- 24) Origami Geometric Constructions.
<<https://web.archive.org/web/20070702105325/http://www.merrimack.edu/~thull/omfiles/ex1sol.html>>
- 25) Origami mathematics. <<http://mars.wne.edu/~thull/origamimath.html>>
- 26) Origami provides unexpected inspiration. <<https://www.asme.org/topics-resources/content/origami-provides-unexpected-inspiration>>
- 27) Problemas de coloración.
<http://www.bermarez.com/papiro/413_problemas_de_coloracin.html>
- 28) Resolución de ecuaciones- Rescate geométrico. <<https://sites.google.com/site/laideafeliz/home/historia-de-la-mtemtica/sobre-ecuaciones-cuadráticas-y-cúbicas>>
- 29) Symmetry of buckminsterfullerene. <<https://edu.rsc.org/feature/symmetry-of-buckminsterfullerene/2020237.article>>
- 30) The power of origami. <<https://plus.maths.org/content/power-origami>>
- 31) Viquipèdia – biografies dels artistes de l'apartat 1.4

Índex de il·lustracions

Il·lustració 1: Noshi tradicional japonès.....	10
Il·lustració 2: Monument de Sadako Sasaki al Parc de la Pau, Hiroshima (Japó).....	12
Il·lustració 3: Monument de Sadako Sasaki al Parc de la Pau, Seattle (Estats Units).....	12
Il·lustració 4: Akira Yoshizawa.....	14
Il·lustració 5: Éric Joisel.....	14
Il·lustració 6: Ratolí – diagrama: Éric Joisel.....	15
Il·lustració 7: Tomoko Fuse.....	15
Il·lustració 8: Robert Lang.....	15
Il·lustració 9: Tom Hull.....	16
Il·lustració 10: <i>Pajarita</i>	17
Il·lustració 11: Tessel·lació Miura-Ori doblegada amb bioplàstic.....	19
Il·lustració 12: Bases principals i els seus corresponents patrons de línies.....	20
Il·lustració 13: Hipopòtam.....	77
Il·lustració 14: Guerrer.....	77
Il·lustració 15: Tessel·lació.....	77
Il·lustració 16: Figura acordió.....	77
Il·lustració 17: Esquirol.....	78
Il·lustració 18: Animals.....	78
Il·lustració 19: Doble hèlix ADN.....	78
Il·lustració 20: Figura modular.....	78
Il·lustració 21: Insecte.....	79
Il·lustració 22: Nan.....	79
Il·lustració 23: Cartell origami modular.....	79

Índex de taules

Taula 1: Mòduls principals.....	21
Taula 2: Els sòlids platònics.....	53
Taula 3: Tipus de curvatura amb mòduls PHiZZ.....	57
Taula 4: Algunes aplicacions pràctiques de l'origami.....	64
Taula 5: Construccions d'origami modular.....	79
Taula 6: Taula de valors per la funció $x^2+2x+4=y$	81
Taula 7: Teoria de grafs.....	86

Índex de figures

Figura 1: Representació de l'axioma 1.....	23
Figura 2: Representació de l'axioma 2.....	24
Figura 3: Representació de la mediatriu del segment p_1p_2 obtinguda mitjançant una construcció amb regle i compàs.....	24

Figura 4: Representació de l'axioma 3.....	25
Figura 5: Representació de la construcció de la bisectriu d'un angle usant regla i compàs.....	26
Figura 6: Representació de l'axioma 4.....	26
Figura 7: Representació de l'axioma 4 fent servir regla i compàs.....	27
Figura 8: Representació de l'axioma 5.....	27
Figura 9: Representació de l'axioma 5 amb regla i compàs quan hi ha un punt d'intersecció.....	28
Figura 10: Representació de l'axioma 5 amb regla i compàs en el cas de realitzar el segment p_1p_4	29
Figura 11: Representació de l'axioma 5 amb regla i compàs en el cas de realitzar el segment p_1p_3	29
Figura 12: Obtenció d'una paràbola mitjançant repeticions de l'axioma 5.....	30
Figura 13: Demostració de la paràbola obtinguda repetint l'axioma 5.....	31
Figura 14: Demostració mitjançant dobles de la paràbola obtinguda repetint l'axioma 5.....	31
Figura 15: Representació geomètrica de l'axioma 6.....	32
Figura 16: Representació de l'axioma 6.....	32
Figura 17: Representació de l'axioma 7.....	33
Figura 18: Construcció del quadrat de Beloch.....	34
Figura 19: Primer pas del mètode Lill-Beloch.....	35
Figura 20: Segon pas del mètode Lill-Beloch.....	35
Figura 21: Tercer pas del mètode Lill-Beloch (a).....	36
Figura 22: Tercer pas del mètode Lill-Beloch (b).....	36
Figura 23: Tercer pas del mètode Lill-Beloch (c).....	36
Figura 24: Representació de paràboles i línies tangents per el mètode Lill-Beloch.....	36
Figura 25: Explicació de Tom Hull del mètode Lill-Beloch.....	37
Figura 26: Obtenció de l'arrel $-1,2$	38
Figura 27: Obtenció de l'arrel $0,5$	38
Figura 28: Obtenció de l'arrel 2	38
Figura 29: Relació entre cubs de volums $1, 0$ i 2 respectivament.....	40
Figura 30: Marcatge de punts i línies importants i aplicació de l'axioma 6.....	40
Figura 31: Obtenció de les arestes que dividides donen arrel cúbica de 2	41
Figura 32: Trisecció: pas 1.....	42
Figura 33: Trisecció: pas 2.....	43
Figura 34: Trisecció: pas 3.....	43
Figura 35: Trisecció: pas 4.....	43
Figura 36: Trisecció: pas 5.....	44
Figura 37: Trisecció: pas 6.....	44
Figura 38: Patró de línies d'una grua amb un vèrtex A marcat.....	45
Figura 39: Demostració del teorema de Kawasaki.....	45
Figura 40: Demostració teorema de Maekawa (a).....	47
Figura 41: Demostració teorema de Maekawa (b).....	47
Figura 42: Doble coloració (1a).....	48

Figura 43: Doble coloració versió simplificada (2a).....	48
Figura 44: Doble coloració (1b).....	49
Figura 45: Doble coloració (2b).....	49
Figura 46: Doble coloració (1c).....	49
Figura 47: Doble coloració (2c).....	49
Figura 48: Doble coloració (1d).....	50
Figura 49: Doble coloració (2d).....	50
Figura 50: Doble coloració (3d).....	50
Figura 51: Doble coloració (4d).....	50
Figura 52: Exemple de homeomorfisme.....	52
Figura 53: <i>Buckyball</i> (C_{60}) amb representació de components.....	54
Figura 54: <i>Buckyball</i> (C_{60}).....	54
Figura 55: Mòdul PHiZZ.....	56
Figura 56: Unió de 3 mòduls PHiZZ.....	57
Figura 57: Graf de la <i>buckyball</i> C_{60} amb un cicle hamiltonià ombrejat.....	58
Figura 58: Graf de la <i>buckyball</i> C_{60} acolorit fent servir únicament tres colors.....	59
Figura 59: <i>Buckyball</i> C_{60} feta amb origami.....	59
Figura 60: Graf del dodecaedre amb un cicle hamiltonià ombrejat.....	59
Figura 61: Graf del dodecaedre fent servir únicament tres colors.....	59
Figura 62: Dodecaedre fet amb origami.....	59
Figura 63: Representació d'un tor.....	60
Figura 64: Tor realitzat amb 360 mòduls PHiZZ.....	62
Figura 65: Diagrama per el tor de 360 peces.....	73
Figura 66: Les 360 peces necessàries per construir el tor.....	73
Figura 67: Procès de construcció del tor.....	73
Figura 68: Tetraedre inscrit en un dodecaedre.....	74
Figura 69: Cinc tetraedres inscrits en un dodecaedre.....	75
Figura 70: Cinc tetraedres intersectats.....	75
Figura 71: Secció cònica- Paràbola.....	80
Figura 72: Representació gràfica paràbola.....	81
Figura 73: Parts d'una paràbola.....	81
Figura 74: Axioma 7- Pas 1.....	82
Figura 75: Axioma 7- Pas 2.....	82
Figura 76: Axioma 7- Pas 3.....	83
Figura 77: Axioma 7- Pas 4.....	83
Figura 78: Axioma 7- Pas 5.....	84
Figura 79: Comportament de materials amb coeficient de Poisson positiu i negatiu.....	87
Figura 80: Miura-Ori (a).....	87
Figura 81: Miura-Ori (b).....	88

ANNEX

1 Construccions d'origami

Al llarg d'aquest apartat de l'annex es presentaran figures d'origami construïdes per mi amb l'indispensable ajuda dels vídeos de YouTube els quals m'han proporcionat instruccions visuals per poder dur a terme les construccions. A més, degut a la visita que vaig efectuar el passat mes de juny del 2019 a l'EMOZ (el museu d'origami de Saragossa) aprofito per mostrar uns dels models més impressionants que hi vaig trobar.

1.1 Llistat de les figures realitzades

A la taula 5 trobareu totes les figures d'origami modular que vaig realitzar per aquest treball així com el tipus de peces que he fet servir per a cadascun i la quantitat de peces necessitades.

Com es pot observar a la taula 5 vaig haver d'aprendre realitzar 6 tipus de peces i com encaixar-les correctament. Gràcies a l'estructura simètrica dels models un cop vaig entendre com ajuntar dues o tres peces la construcció final ja no quedava tant complicada.

D'entre els 9 models presentats el que més peces ha necessitat és el tor però la figura més difícil i la construcció de la qual m'ha suposat un gran repte és la dels cinc tetraedres que s'intersecten. A continuació s'explicaran alguns detalls sobre la construcció d'aquestes dues figures.

Construcció del tor

Per a construir el tor de 360 peces primerament s'han de saber realitzar peces PHiZZ. Després, és necessari construir totes les 360 peces abans de començar a encaixar-les. A continuació, com ja s'ha explicat en la part principal del treball, cal tenir clar el nombre de pentàgons, hexàgons i heptàgons que formaran el tor i, a partir d'aquí, s'ha de buscar un diagrama corresponent per així saber de quina manera s'han de col·locar les peces.

Els diagrames són petites representacions simplificades del model final i són molt útils especialment en figures de grans dimensions. Per el tor existeix un diagrama dissenyat

per Tom Hull (figura 65), que és el que vaig fer servir. Aquest només il·lustra una part del tor i cal repetir-la fins completar la figura.

Cap al final de la construcció comença a aparèixer tensió entre les peces i, per causa de no disposar de paper d'alta qualitat, no es mantenen gaire unides, per la qual cosa va ser indispensable utilitzar adhesiu. Finalment, després de molts dies de treball el tor queda acabat amb el nombre exacte de peces.

Havent utilitzat peces de dimensions 10x10 el tor ha resultat tenir un diàmetre interior de 60 cm. Les següents il·lustracions mostren parts del procés de construcció, el qual ha tingut com a resultat final el tor de la taula 5.



Figura 65: Diagrama per el tor de 360 peces

FONT: Tom Hull



Figura 66: Les 360 peces necessàries per construir el tor

FONT PRÒPIA



Figura 67: Procès de construcció del tor

FONT PRÒPIA

Construcció de cinc tetraedres intersectats

Aquest model, com ja he comentat abans, és el que té la construcció més difícil i, de fet, està considerat com una de les figures d'origami modular més complicades i alhora més fascinants. Tot i que a primera vista sembla una construcció caòtica i sense sentit realment té un fort fonament matemàtic.

La base d'aquesta figura la constitueixen dos sòlids platònics: el dodecaedre i el tetraedre. Si ens imaginem un dodecaedre amb cares que permeten veure l'interior i situem un punt en vèrtexs interiors equidistants i els unim amb línies resultarà l'estructura d'un tetraedre. Així, s'obté un tetraedre inscrit en el dodecaedre. Però, com que el dodecaedre té 20 vèrtexs i el tetraedre en té 4 resulta que hi ha 5 maneres de posicionar el tetraedre inscrit. Així, per analogia també ens adonem que a l'interior del dodecaedre hi caben alhora cinc tetraedres.

Així, Tom Hull va tenir la idea de crear aquest objecte matemàtic utilitzant l'origami però amb un petit canvi. Ja que crear els cinc tetraedres intersectats figura 69 significaria fer forats al paper, l'*origamista* va pensar que fer només les arestes estaria millor. Per tant, ja no hi haurien cares que impedeixin el pas de les altres peces. Amb aquest detall resolt també li faltava determinar quin tipus de peces i de quines dimensions faria servir. Va optar finalment per la peça que s'observa a la taula 5 i de ratio del paper de 1:3.

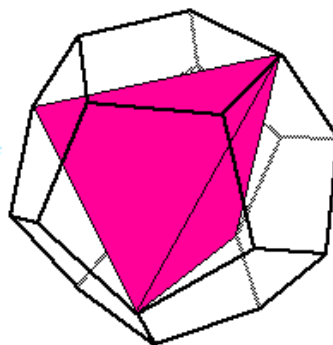
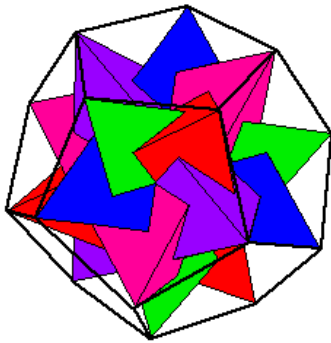


Figura 68: Tetraedre inscrit en un dodecaedre

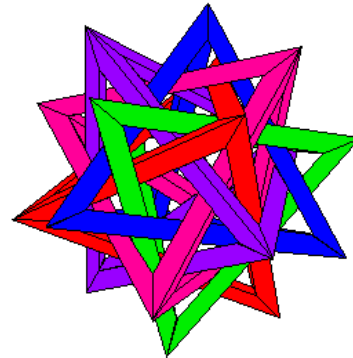
FONT:<http://mars.wne.edu/~thull/fit.html>



*Figura 69: Cinc tetraedres
inscrits en un dodecaedre*

FONT:

<http://mars.wne.edu/~thull/fit.html>




*Figura 70: Cinc tetraedres
intersectats*

FONT:

<http://mars.wne.edu/~thull/fit.html>

Per a construir aquest model correctament amb origami s'ha d'entendre la figura i el perquè del posicionament de cada aresta i, bàsicament, al final cada peça ha de tenir a sobre dues altres peces. En aquest cas, igual que en el tor, les peces tendeixen a no mantenir-se juntes segons el grossor o tipus de paper utilitzat però sempre hi ha la opció d'aplicar una petita quantitat de cola.

NOM	CUB	ICOSAEDRE	TETRAEDRE	OCTAEDRE	DODECAEDRE	DODECAEDRE PHIZZ	BUCKYBALL C ₆₀	TOR	CINC TETRAEDRES
IMATGE									
TIPUS DE PECES									
NO. DE PECES	24	30	6	4	12	30	90	360	30
INSTRUCCIONS	https://www.youtube.com/watch?v=LhDBs8jEAew (només un cub amb 6 peces, però procediment igual)	https://www.youtube.com/watch?v=H7qE_Tc8e4g&t=104s	https://www.youtube.com/watch?v=a-TRptGo8cg&t=1s	https://www.youtube.com/watch?v=akCHeLIQMk&t=254s	https://www.youtube.com/watch?v=8mpbil36gAU	https://www.youtube.com/watch?v=vFYw47Wx2N8 + https://www.youtube.com/watch?v=dH-uTRdI4XU (només instruccions de com fer peces PHiZZ i com encaixar-les ja que el dodecaedre i la buckyball C ₆₀ s'han realitzat segons el graf de la pàgina 59. Per el tor s'ha seguit el diagrama present a la pàgina 74).			https://www.youtube.com/watch?v=aT2UHxA4uRY

Taula 5: Construccions d'origami modular

1.2 Fotografies EMOZ



Il·lustració 13: Hipopòtam (un únic full) *FONT PRÒPIA*

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 14:Guerrer (un únic full) *FONT PRÒPIA*

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 15: Tessel·lació *FONT PRÒPIA*

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 16: Figura acordió

FONT PRÒPIA

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 17: Esquirol

FONT PRÒPIA

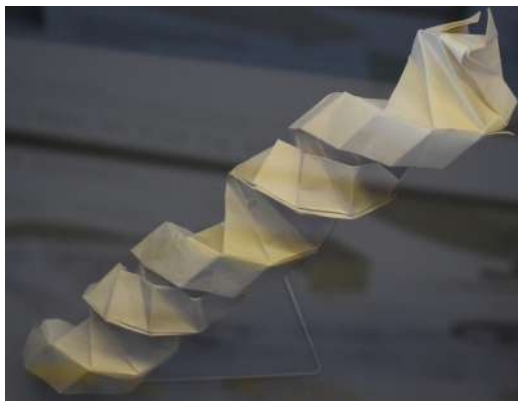
Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 18: Animals

FONT PRÒPIA

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 19: Doble hèlix ADN

FONT PRÒPIA

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 20: Figura modular

FONT PRÒPIA

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 21: Insecte

FONT PRÒPIA

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 22: Nan

FONT PRÒPIA

Fotografiat a l'EMOZ



Il·lustració 23: Cartell origami modular

FONT PRÒPIA

Fotografiat a l'EMOZ

2 Matemàtiques

2.1 La paràbola

Com a primera definició, la paràbola forma part de la família de còniques, és a dir, s'obté mitjançant un tall d'una secció paral·lela a una aresta d'un con (figura 71).

A més a més, la paràbola ha de posseir sempre dos elements fonamentals : el focus (un punt) i la directriu (una recta). Així, com a segona definició, la paràbola és la representació del conjunt de punts que equidisten tant del focus com de la directriu. Una altra característica important és la simetria d'aquesta cònica, ja que sempre hi ha una recta que passa pel focus i divideix la paràbola en dues seccions simètriques (figura 73).

Com qualsevol altre corba, la paràbola es pot expressar com una funció, en aquest cas com una funció quadràtica.

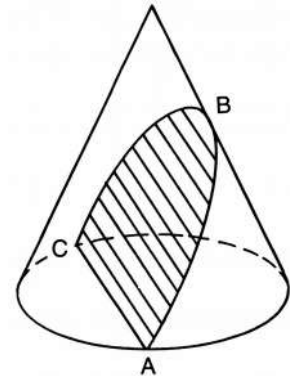


Figura 71: Secció cònica- Paràbola

FONT:
[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parabola_\(PSF\).png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Parabola_(PSF).png)

Fórmula general de les funcions de segon grau $ax^2 + bx + c = y$

Quan el focus de la paràbola està situat en l'eix de les y, la variable b serà igual a 0. De la mateixa manera, si el focus està sobre l'eix de les x l'equació passa a tenir la forma: $ay^2+c=x$. Mitjançant l'elaboració d'una taula de valors un cop donada l'equació s'obtenen valors de les x i les y així formant les coordenades de diversos punts. Aquests punts si es representen correctament donen lloc a la paràbola. Aquí es mostra un exemple:

Donada l'equació de segon grau $x^2+ 2x+4=y$ procedim a realitzar una taula en la qual assignem un valor aleatori per la x i obtenim el valor corresponent de la y.

x	y
-2	4
-1	3
0	4
1	7
2	12

Taula 6: Taula de valors per la funció $x^2+2x+4=y$

D'aquesta manera hem obtingut 4 possibles valors de les incògnites, amb x i $y \in \mathbb{N}$, els quals es poden escriure també en forma de punts com per exemple: $p_1 (-2,4)$, $p_2 (1,3)$, $p_3 (0,4)$, $p_4 (1,7)$ i $p_5 (2,12)$. Si agafem un sistema de coordenades cartesianes i representem els valors dels punts obtinguts observarem que unint-los el que farem és dibuixar una paràbola (figura 72). Aprofitant la mateixa imatge he decidit representar també una recta l_1 que passa per p_1 i que se'n diu que és tangent a la paràbola que acabem de dibuixar.

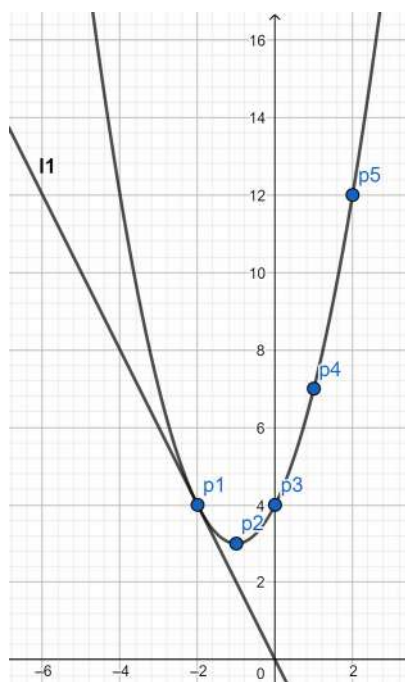


Figura 72: Representació gràfica paràbola

FONT PRÒPIA

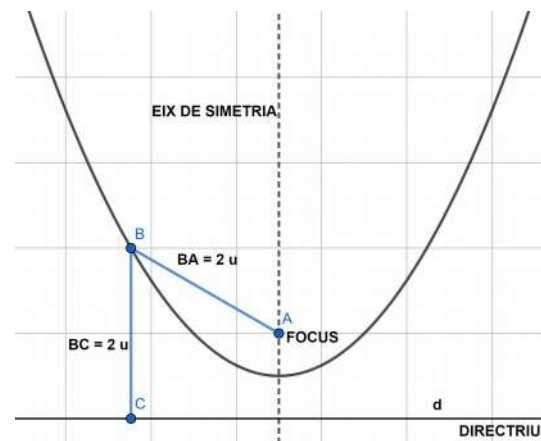


Figura 73: Parts d'una paràbola

FONT PRÒPIA

2.2 Construcció geomètrica de l'axioma 7 fent servir regle sense graduar i compàs mitjançant GeoGebra

Es coneixen l_1 , l_2 i p_1 .

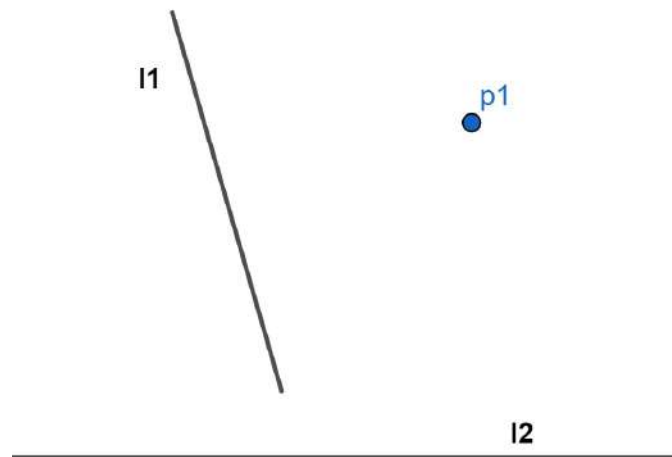


Figura 74: Axioma 7- Pas 1

FONT PRÒPIA

Primer pas: allargar el segment l_1 tal que es formi el punt d'intersecció A de les rectes l_1 i l_2 . Després, unir A amb p_1 per formar l_3 . D'aquesta manera, l_1 i l_3 formaran un angle β .

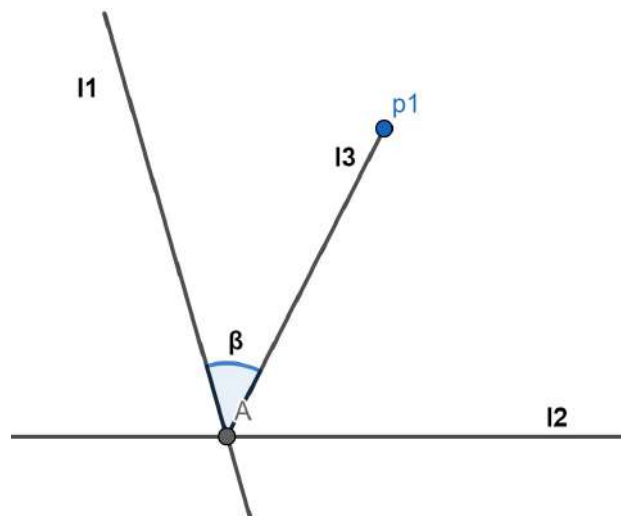


Figura 75: Axioma 7- Pas 2

FONT PRÒPIA

Segon pas: fer la bisecció (com en l'axioma 3) de l'angle β i marcar la bisectriu l_4 (en la segona imatge s'han eliminat les circumferències per una millor visualització del procès). A més, cal unir B amb p_1 per així poder marcar la intersecció amb l_4 , o sigui el punt D.

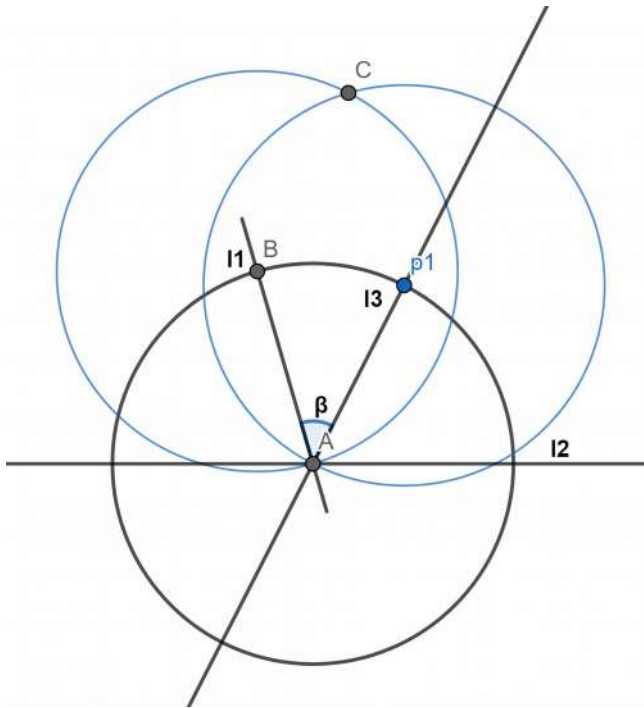


Figura 76: Axioma 7- Pas 3

FONT PRÒPIA

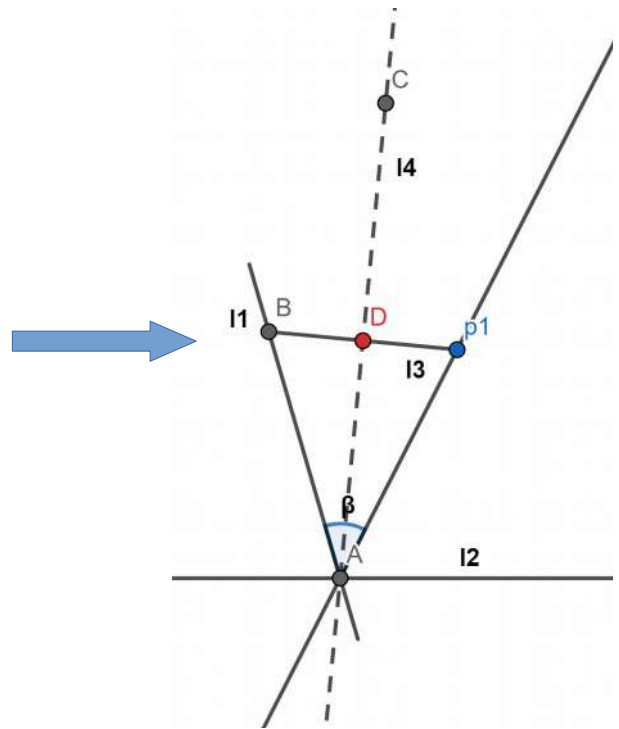


Figura 77: Axioma 7- Pas 4

FONT PRÒPIA

Tercer pas: es poden eliminar alguns elements que ja no es faran servir però és important que el punt D romangui al seu lloc. En el meu cas he preferit mantenir, a part del punt D, el dibuix inicial. Ara, cal fer, com en l'axioma 4, una recta perpendicular a l_2 i que passa per D. D'aquesta forma hem obtingut la recta d, el qual era l'objectiu d'aquest procés.

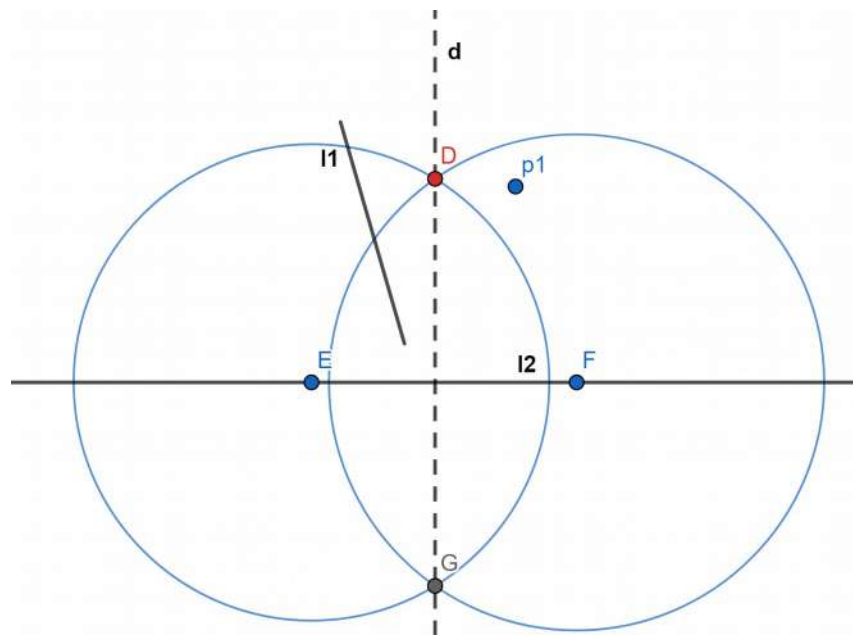


Figura 78: Axioma 7- Pas 5

FONT PRÒPIA

2.3 Demostració geomètrica de la trisecció

Aquesta demostració apareix en el llibre *Geometric folding algorithms*, citat en la bibliografia. És una demostració que justifica mitjançant propietats dels triangles per què realment la trisecció per el mètode d'Abe està ben feta. A continuació hi ha una traducció pròpia de les explicacions del quadre blau de la següent pàgina:

Es coneixen a, b i c , tres punts que es troben en els extrems esquerres de les tres línies paral·leles inferiors; la part de baix del quadrat i les dues primeres línies dels doblecs (vegeu figura 19.4). El punt b es troba en el mig del segment ac . Ara, a través de la línia L del doblec obtinguda mitjançant l'axioma 6, es superposen aquests tres punts i el punts a' , b' i c' on b' és el punt mig del segment $a'c'$. Perquè a' pertany a la línia horitzontal que passa per b i ja que b és el punt mig del segment vertical ac resulta que la longitud $a'c'$ és igual a la del segment $a'a$ i així el triangle $aa'c'$ és isòsceles. Per tant, la seva imatge respecte de la línia L del doblec, que és el triangle $aa'c'$ també és isòsceles. Així, l'angle $a'ac'$ s'ha dividit per la meitat: l'angle $a'ab' = l'angle b'ac' = \alpha$. Ja que el triangle $aa'c'$ és isòsceles,

l'angle $aa'c' = 90^\circ - \alpha$. Degut a que a' és la imatge de la cantonada del quadrat vol dir que hi ha un angle de 90° i així l'angle $xa'a = \alpha$ i per analogia $xaa' = \alpha$. Per últim resulta que l'angle θ en el punt a s'ha trisecat en $\alpha + \alpha + \alpha$.

19.2. Huzita's Axioms and Hatori's Addition

287

Box 19.1: Abe's trisection

Let a , b , and c be three points at the left ends of the bottom three parallel lines: the bottom side of the square and the first two fold lines (see Figure 19.4). Point b is the midpoint of ac by construction. Now reflection through the A6 crease line L maps the three points to a' , b' , and c' , with again b' the midpoint of $a'c'$. Because a' lies on the horizontal line through b and because b is the midpoint of the vertical line segment ac , length $a'c'$ equals length $a'a$, so $\triangle aa'c'$ is isosceles. Therefore its reflection through crease line L , $\triangle aa'c'$, is also isosceles. Thus, $\angle a'ac'$ is cleverly split in half: $\angle a'ab' = \angle b'ac' = \alpha$. Because $\triangle aa'c'$ is isosceles, its base angle $\angle aa'c' = 90^\circ - \alpha$. Because a' is a reflection of the corner of the square, it is a right angle, leaving $\angle xa'a = \alpha$, and therefore by reflection $\angle xaa' = \alpha$. Thus the angle θ at a is trisected into $\alpha + \alpha + \alpha$.

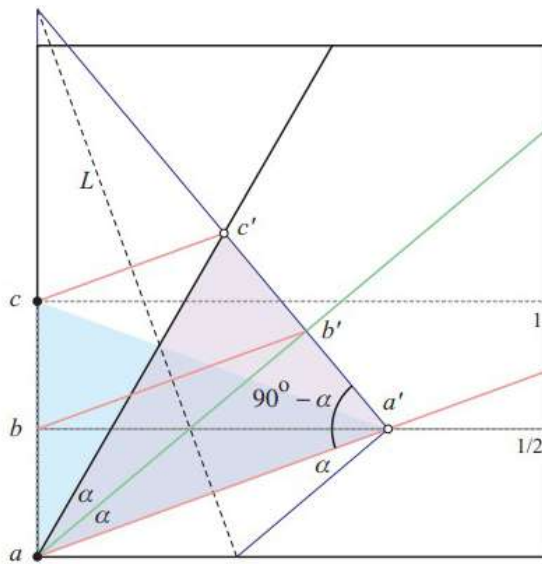
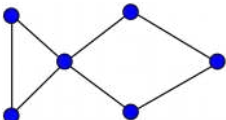
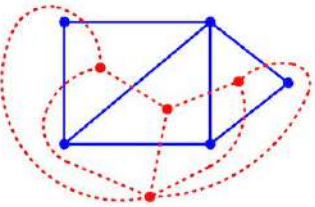
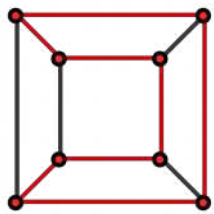
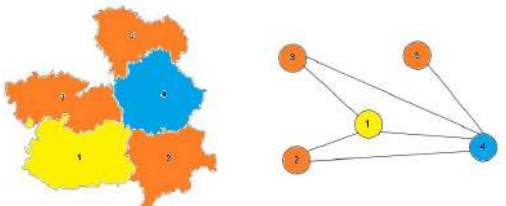


Figure 19.4. Abe's trisection analyzed.

2.4 Conceptes clau de la Teoria de grafs

TEORIA DE GRAFS		
Definició	Cicle hamiltonià	Teorema dels quatre colors
<p>La teoria de grafs és la part de les matemàtiques que estudia els grafs.</p> <p>- Un graf és un conjunt format per vèrtexs (punts blaus) i arestes (segments negres).</p>  <p>- Hi ha molts tipus de grafs però el que apareix en aquest treball és el graf dual. Aquest graf es caracteritza per tenir un vèrtex per a cada regió d'un altre graf. A més, hi ha arestes que uneixen cada dues regions que es toquen.</p> 	<p>Un cicle hamiltonià d'un graf comença en un vèrtex, recorre tots els altres vèrtexs un únic cop i mai passa per la mateixa aresta dues vegades, per finalment tornar al vèrtex de l'inici i així tancar el cicle.</p> <p>- Quan un graf té un nombre parell de vèrtexs d'acord amb la definició anterior significa que el seu cicle hamiltonià també tindrà la mateixa característica.</p> <p>- Un cicle hamiltonià amb nombre de vèrtexs parell es pot acolorir alternant únicament dos colors</p> 	<p>Aquesta teoria suposa que qualsevol mapa es pot acolorir amb quatre colors com a mínim, de manera que cada dues regions que comparteixen aresta tenen diferent color.</p> <p>Per fer la demostració cal trobar el graf dual del graf que constitueix el mapa i acolorir cada vèrtex tal que mai estiguin units per una aresta dos vèrtexs del mateix color.</p> <p>Un cop fet això, es torna al graf inicial i s'acolorix cada regió amb el color del seu vèrtex del graf dual assignat.</p> 

Taula 7: Teoria de grafs

3 Característiques del Miura-Ori

Així com s'ha comentat en el treball hi ha dos tipus de materials elàstics: els que tenen un valor positiu pel coeficient de Poisson i els que tenen valor negatiu, anomenats també materials auxètics (veure figures següents per veure el comportament d'ambdós tipus quan s'estiren).

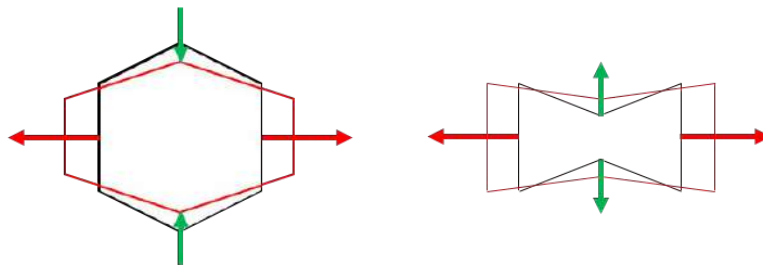


Figura 79: Comportament de materials amb coeficient de Poisson positiu (esquerra) i negatiu (dreta)

FONT: https://www.esa.int/gsp/ACT/projects/auxetic_materials.html

En la figura anterior, les fletxes vermelles representen la direcció de l'estirament i les verdes mostren si el material es comprimeix (esquerra) o s'expandeix (dreta).

A més a més, els materials amb coeficient de Poisson positiu es poden deformar de manera que adquireixin una curvatura negativa (recordi's la taula 3 de la pàgina 57). El Miura-Ori es diu que dóna lloc a materials amb coeficient de Poisson negatiu i positiu a la vegada. Això es deu a que:

- 1) Quan el Miura-Ori s'estira en una direcció s'expandeix en la direcció perpendicular

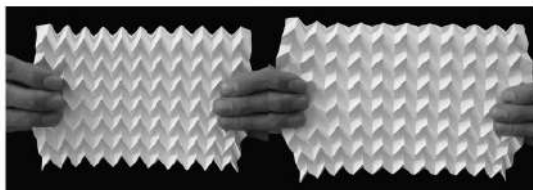


Figura 80: Miura-Ori (a)

FONT: <http://www.markschenk.com/research/files/PhD%20thesis%20-%20Mark%20Schenk.pdf>

**COEFICIENT DE POISSON
NEGATIU**

2) Quan el Miura-Ori es deforma dona lloc a una forma amb curvatura negativa

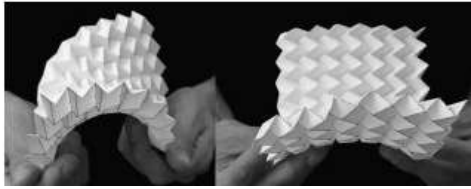


Figura 81: Miura-Ori (b)

FONT:<http://www.markschenk.com/research/files/PhD%20thesis%20-%20Mark%20Schenk.pdf>



COEFICIENT DE POISSON

POSITIU

Llavors, resulta que els materials inspirats en el Miura-Ori són molt peculiars i depenent de la seva orientació aporten unes característiques o unes altres.

Els materials auxètics són molt útils sobretot en la fabricació de superfícies que absorbeixin els xocs o bé d'altres que permetin un fàcil emmagatzematge gràcies a la capacitat del material d'expandir-se i comprimir-se ràpidament.